

Über die
Einhüllungsflächen von Potenzebenscharen.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hoher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht von

Adolf Kadesch
aus Mainz.

Marburg.

Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).

1887.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. Edmund Hess zu Marburg

gewidmet

vom Verfasser.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554034_0064

I.

§. 1.

Zwei Kugelsysteme seien bestimmt durch die Gleichungen:

$$\begin{array}{l} 1. \quad [x-f(\alpha)]^2 + [y-f_1(\alpha)]^2 + [z-f_2(\alpha)]^2 = [f_3(\alpha)]^2, \\ 2. \quad [x-\varphi(\beta)]^2 + [y-\varphi_1(\beta)]^2 + [z-\varphi_2(\beta)]^2 = [\varphi_3(\beta)]^2. \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} [x-f(\alpha, \beta)]^2 + [y-f_1(\alpha, \beta)]^2 + [z-f_2(\alpha, \beta)]^2 = [f_3(\alpha, \beta)]^2, \\ [x-\varphi(\gamma, \delta)]^2 + [y-\varphi_1(\gamma, \delta)]^2 + [z-\varphi_2(\gamma, \delta)]^2 = [\varphi_3(\gamma, \delta)]^2. \end{array} \right.$$

Zwischen den veränderlichen Parametern

α und β möge die Gleichung bestehen:

$$3. \quad \psi(\alpha, \beta) = 0,$$

α, β, γ und δ mögen die Gleichungen bestehen:

$$\begin{cases} \psi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0, \\ \psi_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0, \end{cases}$$

durch welche jeder Kugel des einen Systems eine oder mehrere Kugeln des anderen zugeordnet werden. Je zwei so einander zugeordnete Kugeln besitzen eine Potenzebene. Es kann nun die Aufgabe gestellt werden: die Einhüllungsfläche aller dieser Potenzebenen zu bestimmen.

Aus den Gleichungen 1. und 2. folgt, dass die Mittelpunkte der Kugeln des ersten Systems der durch die Gleichungen:

$$\begin{array}{l} x = f(\alpha), \\ y = f_1(\alpha), \\ z = f_2(\alpha) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x = f(\alpha, \beta), \\ y = f_1(\alpha, \beta), \\ z = f_2(\alpha, \beta) \end{array} \right.$$

dargestellten Raumkurve dargestellten Fläche

angehören, während der Ort der Mittelpunkte der Kugeln des zweiten Systems die durch die Gleichungen:

$$\begin{array}{l} x = \varphi(\beta), \\ y = \varphi_1(\beta), \\ z = \varphi_2(\beta) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x = \varphi(\gamma, \delta), \\ y = \varphi_1(\gamma, \delta), \\ z = \varphi_2(\gamma, \delta) \end{array} \right.$$

dargestellte Kurve ist. dargestellte Fläche ist.

Mithin lässt sich obige Aufgabe auch so formulieren:

Die Mittelpunkte zweier Kugeln bewegen sich

auf zwei Raumkurven,

auf zwei Flächen so zwar, dass jeder derselben der Reihe nach mit jedem Punkt seiner Fläche zusammenfällt,

während sich gleichzeitig die Radien der Kugeln nach bestimmten Gesetzen ändern. In kontinuierlicher Aufeinanderfolge werde in bestimmter Weise jeder Kugel des einen der so entstehenden Kugelsysteme eine (oder mehrere) solche des anderen Systems zugeordnet. Je zwei einander zugeordnete Kugeln bestimmen eine Potenzebene. Es ist die Einhüllungsfläche aller dieser Potenzebenen zu finden.

§. 2.

Nimmt man statt α die x Koordinate $a = f(\alpha)$ | Nimmt man statt α und β die $x =$ bzw. $y =$
Koordinate $a = f(\alpha, \beta)$ und $b = f_1(\alpha, \beta)$

der Kugelmittelpunkte des ersten Systems als Parameter, so nehmen die Gleichungen 1. und 3. bezüglich die Formen an:

$$\begin{aligned} 4. & \quad (x-a)^2 + [y-F(a)]^2 + [z-F_1(a)]^2 = [F_2(a)]^2, & (x-a)^2 + (y-b)^2 + [z-F(a, b)]^2 &= [F_1(a, b)]^2, \\ 5. & \quad \psi_1(a, \beta) = 0, & \begin{cases} \psi_2(a, b, \gamma, \delta) = 0, \\ \psi_3(a, b, \gamma, \delta) = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

während 2. unverändert bleibt. Aus 5. folgt:

$$\beta = \psi_2(a). \quad \begin{cases} \gamma = \psi_4(a, b), \\ \delta = \psi_5(a, b). \end{cases}$$

Setzt man

diesen Wert | diese Werte

in 2. ein, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$6. \quad [x-\Phi(a)]^2 + [y-\Phi_1(a)]^2 + [z-\Phi_2(a)]^2 = [\Phi_3(a)]^2. \quad | \quad [x-\Phi(a, b)]^2 + [y-\Phi_1(a, b)]^2 + [z-\Phi_2(a, b)]^2 = [\Phi_3(a, b)]^2.$$

Subtrahiert man 6. von 4., so ergibt sich als Gleichung der Potenzebenenchar:

$$\begin{aligned} 2x(\Phi - a) + 2y(\Phi_1 - F) + 2z(\Phi_2 - F_1) &= & 2x(\Phi - a) + 2y(\Phi_1 - b) + 2z(\Phi_2 - F) &= \\ -a^2 + \Phi^2 - F^2 + \Phi_1^2 - F_1^2 + \Phi_2^2 + F_2^2 - \Phi_3^2 &| & -a^2 + \Phi^2 - b^2 + \Phi_1^2 - F^2 + \Phi_2^2 + F_1^2 - \Phi_3^2 \end{aligned}$$

oder, wenn

$$-a^2 + \Phi^2 - F^2 + \Phi_1^2 - F_1^2 + \Phi_2^2 + F_2^2 - \Phi_3^2 \quad | \quad -a^2 + \Phi^2 - b^2 + \Phi_1^2 - F^2 + \Phi_2^2 + F_1^2 - \Phi_3^2$$

mit X bezeichnet wird:

$$7. \quad 2x(\Phi - a) + 2y(\Phi_1 - F) + 2z(\Phi_2 - F_1) = X. \quad | \quad 2x(\Phi - a) + 2y(\Phi_1 - b) + 2z(\Phi_2 - F) = X.$$

Differentiiert man diese Gleichung partiell

nach a und eliminiert a aus der erhaltenen Gleichung | nach a und b und eliminiert a und b aus den erhaltenen Gleichungen

und aus 7., so resultiert die Gleichung der Einhüllungsfläche der Potenzebenen. Aus 7. folgt, dass die Potenzebenenchar und also auch deren Einhüllungsfläche dieselbe bleibt, so lange die Verhältnisse dreier der Grössen

$$\Phi - a, \Phi_1 - F, \Phi_2 - F_1, X \quad | \quad \Phi - a, \Phi_1 - b, \Phi_2 - F, X$$

zur vierten sich nicht ändern, welche Werte auch

$$F, F_1, F_2, \Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \quad | \quad F, F_1, \Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$$

haben mögen. Ist also für irgend welche Werte dieser Functionen die Einhüllungsfläche der Potenzebenen bestimmt, so weiss man ohne weiteres, dass für alle möglichen anderen Werte der Functionen, für welche jene drei Verhältnisse dieselben Werte besitzen, die Einhüllungsfläche der Potenzebenen dieselbe ist.

§. 3.

Setzt man der Kürze halber:

$$\frac{X}{2(\Phi - a)} = u, \frac{X}{2(\Phi_1 - F)} = v, \frac{X}{2(\Phi_2 - F_1)} = w, \quad | \quad \frac{X}{2(\Phi - a)} = u, \frac{X}{2(\Phi_1 - b)} = v, \frac{X}{2(\Phi_2 - F)} = w,$$

so geht Gleichung 7. über in:

$$7a. \frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1.$$

Durch partielle Differentiation dieser Gleichung nach a und Elimination von a aus der erhaltenen Gleichung

nach a und b und Elimination von a und b aus den erhaltenen Gleichungen

und aus 7a. findet man ebenfalls die Gleichung der Einhüllungsfläche.

Bekanntlich ist nun die Einhüllungsfläche jeder Ebenenschar, in deren Gleichung *ein* veränderliches Parameter vorkommt, eine abwickelbare Fläche. Die Schnittgeraden der auf einander folgenden Ebenen sind die Charakteristiken der Fläche und also die Tangenten von deren Wendungskurve, während die Ebenen die Schmiegungebenen dieser Kurve darstellen. Die Gleichungen der Charakteristiken sind: die Gleichung der Ebenen und die daraus durch partielle Differentiation nach dem Parameter entstehende Gleichung. Es ist also auch die gesuchte Einhüllungsfläche eine abwickelbare Fläche, deren Charakteristiken durch Gleichung 7a. und die daraus durch partielle Differentiation nach a sich ergebende Gleichung bestimmt sind. Diese Gleichungen bringt man auf die gewöhnliche Form der Gleichungen einer Geraden, indem man sie nach y und z auflöst. Zu den Resultaten dieser Auflösung gelangt man einfacher dadurch, dass man Gleichung 7a. mit w und v multipliziert, die erhaltenen Gleichungen partiell nach a differenziert und die so erhaltenen Gleichungen nach y bzw. z auflöst. Es ergibt sich so:

$$8. \begin{cases} y = -\frac{\frac{d}{da} w}{\frac{d}{da} u} \cdot x + \frac{\frac{d}{da} w}{\frac{d}{da} v}, \\ z = -\frac{\frac{d}{da} v}{\frac{d}{da} u} \cdot x + \frac{\frac{d}{da} v}{\frac{d}{da} w}. \end{cases}$$

Man beachte, dass die Koeffizienten der einen dieser Gleichungen aus den entsprechenden der anderen dadurch hervorgehen, dass man v anstelle von w und w anstelle von v setzt. — Auch aus den Gleichungen 8. erhält man natürlich durch Elimination von a die Gleichung der Einhüllungsfläche.

Die Wendungskurve der Einhüllungsfläche ist bestimmt durch 7a. und die daraus durch ein- bzw. zweimalige partielle Differentiation nach a sich ergebenden Gleichungen. Man bringt dieselben auf

Man bringt 7a. und die daraus durch partielle Differentiation nach a und b sich ergebenden Gleichungen

die gewöhnliche Form der Gleichungen einer Raumkurve mit einem veränderlichen Parameter,

indem man sie nach x , y und z auflöst. Die Gleichungen, welche das Resultat dieser Auflösung darstellen, gehen nun offenbar durch gleichzeitige cyclische Vertauschung der Grössen x , y , z und u , v , w aus einander hervor. Es genügt also, eine dieser Gleichungen zu bestimmen. Die beiden anderen ergeben sich dann aus derselben durch besagte Vertauschung.

Statt der durch einmalige partielle Differentiation von 7a. nach a sich ergebenden Gleichung kann man nun z. B. auch eine der Gleichungen 8. (Man könnte auch die Gleichung des Seitenrisses der Charakteristiken wählen.) und statt der durch zweimalige partielle Differentiation von 7a. nach a entstehenden Gleichung also auch eine der durch einmalige partielle Differentiation der Gleichungen 8. nach a sich ergeben Gleichungen nehmen. Diese letzteren Gleichungen enthalten aber von den Koordinaten nur noch x , so dass man also aus einer jeden von ihnen ohne weiteres x als Function von a berechnen kann.

chungen auf die gewöhnliche Form der Gleichungen einer Fläche mit zwei veränderlichen Parametern,

Statt der durch partielle Differentiation von 7a. nach a und b entstehenden Gleichungen kann man auch eines der Gleichungenpaare wählen, welche durch partielle Differentiation nach a und b aus der mit u , v oder w multiplizierten Gleichung 7a. hervorgehen. Dieselben enthalten nur je zwei der Koordinaten. Aus einem der Paare berechne man daher eine der darin vorkommenden Koordinaten als Funktion von a und b . Man bestimme etwa x aus einem der Gleichungenpaare, welche sich durch partielle Differentiation nach a und b aus der mit v bzw. mit w multiplizierten Gleichung 7a. ergeben.

Durch die oben erwähnte cyclische Vertauschung findet man dann auch y und z als Funktionen des Parameters. | der Parameter.

Man erhält so:

$$8a. \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\frac{d}{da} v}{\frac{d}{da} w} : \frac{\frac{d}{da} u}{\frac{d}{da} v}, \\ y = \frac{\frac{d}{da} w}{\frac{d}{da} u} : \frac{\frac{d}{da} v}{\frac{d}{da} w}, \\ z = \frac{\frac{d}{da} u}{\frac{d}{da} v} : \frac{\frac{d}{da} w}{\frac{d}{da} u} \end{array} \right. \quad 8. \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\frac{\partial}{\partial a} v \cdot \frac{\partial}{\partial b} w}{\frac{\partial}{\partial a} u \cdot \frac{\partial}{\partial b} w} - \frac{\frac{\partial}{\partial a} v}{\frac{\partial}{\partial a} w} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial b} v}{\frac{\partial}{\partial b} u}, \\ y = \frac{\frac{\partial}{\partial a} w \cdot \frac{\partial}{\partial b} u}{\frac{\partial}{\partial a} v \cdot \frac{\partial}{\partial b} u} - \frac{\frac{\partial}{\partial a} w}{\frac{\partial}{\partial a} v} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial b} w}{\frac{\partial}{\partial b} v}, \\ z = \frac{\frac{\partial}{\partial a} u \cdot \frac{\partial}{\partial b} v}{\frac{\partial}{\partial a} w \cdot \frac{\partial}{\partial b} v} - \frac{\frac{\partial}{\partial a} u}{\frac{\partial}{\partial a} w} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial b} u}{\frac{\partial}{\partial b} w} \end{array} \right.$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\frac{d}{da} w}{\frac{d}{da} v} : \frac{\frac{d}{da} u}{\frac{d}{da} w}, \\ y = \frac{\frac{d}{da} u}{\frac{d}{da} w} : \frac{\frac{d}{da} v}{\frac{d}{da} u}, \\ z = \frac{\frac{d}{da} v}{\frac{d}{da} u} : \frac{\frac{d}{da} w}{\frac{d}{da} v} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\frac{\partial}{\partial a} w \cdot \frac{\partial}{\partial b} v}{\frac{\partial}{\partial a} u \cdot \frac{\partial}{\partial b} v} - \frac{\frac{\partial}{\partial a} w}{\frac{\partial}{\partial a} u} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial b} w}{\frac{\partial}{\partial b} u}, \\ y = \frac{\frac{\partial}{\partial a} u \cdot \frac{\partial}{\partial b} w}{\frac{\partial}{\partial a} v \cdot \frac{\partial}{\partial b} w} - \frac{\frac{\partial}{\partial a} u}{\frac{\partial}{\partial a} v} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial b} u}{\frac{\partial}{\partial b} w}, \\ z = \frac{\frac{\partial}{\partial a} v \cdot \frac{\partial}{\partial b} u}{\frac{\partial}{\partial a} w \cdot \frac{\partial}{\partial b} u} - \frac{\frac{\partial}{\partial a} v}{\frac{\partial}{\partial a} w} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial b} v}{\frac{\partial}{\partial b} w} \end{array} \right.$$

je nachdem man zur Auffindung des Werts von x die aus der zweiten oder die aus der ersten Gleichung 8. durch partielle Differentiation nach a sich ergebende Gleichung benutzt.

die Gleichungen benutzt, welche durch partielle Differentiation nach a und b aus der mit v multiplizierten Gleichung 7a. hervorgehen, oder die Gleichungen, welche auf dieselbe Art aus der mit w multiplizierten Gleichung 7a. erhalten werden.

Aus den Gleichungen 8. (oder auch aus den drei auf sie folgenden Gleichungen) findet man natürlich durch Elimination der Parameter ebenfalls die Gleichung der Einhüllungsfläche.

§. 4.

Wie in §. 3. bemerkt wurde, findet man durch Elimination

von a | von a und b

aus den Gleichungen 8. die Gleichung der bestimmten Funktionen u , v und w entsprechenden Einhüllungsfläche. Um die Doppelscharen von einander paarweise zugeordneten Kugeln zu finden, deren Potenzebenen diese Fläche einhüllen, hat man

dreien der Funktionen

$$F, F_1, \Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Omega = F_2^2 - \Phi_3^2$$

zweien der Funktionen

$$F, \Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Omega = F_1^2 - \Phi_3^2$$

alle möglichen Formen beigelegt zu denken. Zu jedem System

dieser drei Funktionen | dieser zwei Funktionen

findet man die drei anderen aus den Gleichungen:

$$9. \quad \frac{X}{2(\Phi - a)} = u, \frac{X}{2(\Phi_1 - F)} = v, \frac{X}{2(\Phi_2 - F_1)} = w. \quad \left| \quad \frac{X}{2(\Phi - a)} = u, \frac{X}{2(\Phi_1 - b)} = v, \frac{X}{2(\Phi_2 - F)} = w. \right.$$

Statt für die Grössen u , v , w kann man auch für die rechten Seiten

der Gleichungen 8a. | der Gleichungen 8.

bestimmte Funktionen U , V , W einsetzen.

Es kommt dies darauf hinaus, dass man von vorn herein

eine bestimmte Raumkurve als Wendungskurve der Einhüllungsfläche auffasst. Um die Kurve

$$y = f(x),$$

$$z = \varphi(x)$$

als solche aufzufassen, kann man etwa $U = a$, $V = f(a)$,

$W = \varphi(a)$ annehmen, denn die Gleichungen obiger

Kurve können auch geschrieben werden:

$$x = a,$$

$$y = f(a),$$

$$z = \varphi(a).$$

eine bestimmte Fläche als Einhüllungsfläche auffasst.

Um die Fläche

$$z = f(x, y)$$

als solche aufzufassen, kann man z. B. $U = a$, $V = b$,

$W = f(a, b)$ annehmen, denn obige Flächengleichung

ist ersetzbar durch die Gleichungen:

$$x = a,$$

$$y = b,$$

$$z = f(a, b).$$

Die Doppelscharen von einander paarweise zugeordneten Kugeln, deren Potenzebenen

die abwickelbare Fläche einhüllen, von der obige Kurve die Wendungskurve ist, erhält man, indem man dreien der Funktionen $F, F_1, \Phi, \Phi_1, \Phi_2$ und Ω

obige Fläche einhüllen, erhält man, indem man zweien der Funktionen F, Φ, Φ_1, Φ_2 und Ω

alle möglichen Formen beigelegt denkt. Zu jedem System

dieser drei Funktionen | dieser zwei Funktionen

findet man die drei anderen aus den Differentialgleichungen: ●

$$\begin{array}{l}
 \frac{d}{da} \frac{d}{dv} \frac{d}{dw} : \frac{d}{da} \frac{d}{dw} \frac{d}{dv} = U, \\
 \frac{d}{da} \frac{d}{dw} \frac{d}{dv} : \frac{d}{da} \frac{d}{dv} \frac{d}{dw} = V, \\
 \frac{d}{da} \frac{d}{dv} \frac{d}{dw} : \frac{d}{da} \frac{d}{dw} \frac{d}{dv} = W.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \frac{\partial}{\partial a} v \cdot \frac{\partial}{\partial b} w - \frac{\partial}{\partial a} w \cdot \frac{\partial}{\partial b} v = U, \\
 \frac{\partial}{\partial a} w \cdot \frac{\partial}{\partial b} u - \frac{\partial}{\partial a} u \cdot \frac{\partial}{\partial b} w = V, \\
 \frac{\partial}{\partial a} u \cdot \frac{\partial}{\partial b} v - \frac{\partial}{\partial a} v \cdot \frac{\partial}{\partial b} u = W.
 \end{array}$$

Zu den vermittle Integration dieser Gleichungen sich ergebenden Werten der gesuchten Funktionen kann man auch gelangen, ohne integrieren zu müssen.

Anstelle von 8a. können nämlich, wie bekannt, als Gleichungen der Wendungskurve aufgefasst werden:

$$\begin{array}{l}
 x \cdot \frac{1}{u} + y \cdot \frac{1}{v} + z \cdot \frac{1}{w} = 1, \\
 x \cdot \frac{d^1}{da} \frac{1}{u} + y \cdot \frac{d^1}{da} \frac{1}{v} + z \cdot \frac{d^1}{da} \frac{1}{w} = 0, \\
 x \cdot \frac{d^2}{da^2} \frac{1}{u} + y \cdot \frac{d^2}{da^2} \frac{1}{v} + z \cdot \frac{d^2}{da^2} \frac{1}{w} = 0.
 \end{array}$$

Die Gleichungen 8. ersetzen nämlich, wie bekannt, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
 x \cdot \frac{1}{u} + y \cdot \frac{1}{v} + z \cdot \frac{1}{w} = 1, \\
 x \cdot \frac{\partial^1}{\partial a} \frac{1}{u} + y \cdot \frac{\partial^1}{\partial a} \frac{1}{v} + z \cdot \frac{\partial^1}{\partial a} \frac{1}{w} = 0, \\
 x \cdot \frac{\partial^1}{\partial b} \frac{1}{u} + y \cdot \frac{\partial^1}{\partial b} \frac{1}{v} + z \cdot \frac{\partial^1}{\partial b} \frac{1}{w} = 0.
 \end{array}$$

Mithin sind obige Differentialgleichungen ersetzbar durch nachstehende Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
 U \cdot \frac{1}{u} + V \cdot \frac{1}{v} + W \cdot \frac{1}{w} = 1, \\
 U \cdot \frac{d^1}{da} \frac{1}{u} + V \cdot \frac{d^1}{da} \frac{1}{v} + W \cdot \frac{d^1}{da} \frac{1}{w} = 0, \\
 U \cdot \frac{d^2}{da^2} \frac{1}{u} + V \cdot \frac{d^2}{da^2} \frac{1}{v} + W \cdot \frac{d^2}{da^2} \frac{1}{w} = 0.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 U \cdot \frac{1}{u} + V \cdot \frac{1}{v} + W \cdot \frac{1}{w} = 1, \\
 U \cdot \frac{\partial^1}{\partial a} \frac{1}{u} + V \cdot \frac{\partial^1}{\partial a} \frac{1}{v} + W \cdot \frac{\partial^1}{\partial a} \frac{1}{w} = 0, \\
 U \cdot \frac{\partial^1}{\partial b} \frac{1}{u} + V \cdot \frac{\partial^1}{\partial b} \frac{1}{v} + W \cdot \frac{\partial^1}{\partial b} \frac{1}{w} = 0.
 \end{array}$$

Für diese Gleichungen aber kann man folgende setzen:

$$\begin{array}{l}
 U \cdot \frac{1}{u} + V \cdot \frac{1}{v} + W \cdot \frac{1}{w} = 1, \\
 \frac{dU}{da} \frac{1}{u} + \frac{dV}{da} \frac{1}{v} + \frac{dW}{da} \frac{1}{w} = 0, \\
 \frac{d^2 U}{da^2} \frac{1}{u} + \frac{d^2 V}{da^2} \frac{1}{v} + \frac{d^2 W}{da^2} \frac{1}{w} = 0,
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 U \cdot \frac{1}{u} + V \cdot \frac{1}{v} + W \cdot \frac{1}{w} = 1, \\
 \frac{\partial U}{\partial a} \frac{1}{u} + \frac{\partial V}{\partial a} \frac{1}{v} + \frac{\partial W}{\partial a} \frac{1}{w} = 0, \\
 \frac{\partial U}{\partial b} \frac{1}{u} + \frac{\partial V}{\partial b} \frac{1}{v} + \frac{\partial W}{\partial b} \frac{1}{w} = 0,
 \end{array}$$

wie man erkennt, wenn man

die erste und zweite Gleichung differentiiert, von | die erste Gleichung partiell nach a und b differentiiert

den erhaltenen Gleichungen die zweite bzw. dritte Gleichung subtrahiert, dann die erste der so erhaltenen Gleichungen differenziert und von der resultierenden Gleichung die zweite derselben subtrahiert.

und von den erhaltenen Gleichungen bezüglich die zweite und dritte Gleichung subtrahiert.

Löst man endlich die drei letzten Gleichungen nach u , v und w auf, so erhält man, wenn

$$\begin{vmatrix} U & V & W \\ \frac{dU}{da} & \frac{dV}{da} & \frac{dW}{da} \\ \frac{d^2U}{da^2} & \frac{d^2V}{da^2} & \frac{d^2W}{da^2} \end{vmatrix} = \begin{cases} U \left(\frac{dV}{da} \cdot \frac{d^2W}{da^2} - \frac{dW}{da} \cdot \frac{d^2V}{da^2} \right) + \\ V \left(\frac{dW}{da} \cdot \frac{d^2U}{da^2} - \frac{dU}{da} \cdot \frac{d^2W}{da^2} \right) + \\ W \left(\frac{dU}{da} \cdot \frac{d^2V}{da^2} - \frac{dV}{da} \cdot \frac{d^2U}{da^2} \right) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} U & V & W \\ \frac{\partial U}{\partial a} & \frac{\partial V}{\partial a} & \frac{\partial W}{\partial a} \\ \frac{\partial U}{\partial b} & \frac{\partial V}{\partial b} & \frac{\partial W}{\partial b} \end{vmatrix} = \begin{cases} U \left(\frac{\partial V}{\partial a} \cdot \frac{\partial W}{\partial b} - \frac{\partial W}{\partial a} \cdot \frac{\partial V}{\partial b} \right) + \\ V \left(\frac{\partial W}{\partial a} \cdot \frac{\partial U}{\partial b} - \frac{\partial U}{\partial a} \cdot \frac{\partial W}{\partial b} \right) + \\ W \left(\frac{\partial U}{\partial a} \cdot \frac{\partial V}{\partial b} - \frac{\partial V}{\partial a} \cdot \frac{\partial U}{\partial b} \right) \end{cases}$$

mit $\mathcal{A}$ und

$$\frac{\frac{dR}{da} \cdot \frac{d^2S}{da^2} - \frac{dS}{da} \cdot \frac{d^2R}{da^2}}{\frac{dR}{da} \cdot \frac{\partial S}{\partial b} - \frac{\partial S}{\partial a} \cdot \frac{dR}{da}} \quad \frac{\frac{\partial R}{\partial a} \cdot \frac{\partial S}{\partial b} - \frac{\partial S}{\partial a} \cdot \frac{\partial R}{\partial b}}{\frac{\partial R}{\partial a} \cdot \frac{\partial S}{\partial b} - \frac{\partial S}{\partial a} \cdot \frac{\partial R}{\partial b}},$$

worin R und S Funktionen

von a sind, | von a und b sind,

mit $Q(R, S)$ bezeichnet wird: $u = Q(V, W)$, $v = Q(W, U)$, $w = Q(U, V)$ d. h.

$$10. \quad \begin{cases} \frac{X}{2(\Phi - a)} = Q(V, W), \frac{X}{2(\Phi_1 - F)} \\ = Q(W, U), \frac{X}{2(\Phi_2 - F_1)} = Q(U, V). \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{X}{2(\Phi - a)} = Q(V, W), \frac{X}{2(\Phi_1 - b)} \\ = Q(W, U), \frac{X}{2(\Phi_2 - F)} = Q(U, V). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich aber die gesuchten Funktionen, ohne dass eine Integration vorzunehmen wäre.

Man sieht leicht, dass die Lösungen der Gleichungen 10. aus denen der Gleichungen 9. hervorgehen, wenn man in denselben für u , v , w bezüglich die rechten Seiten der Gleichungen 10. substituiert.

Dass sich aus 9. sowohl als auch aus 10. nicht

$$F_2 \text{ und } \Phi_3 \mid F_1 \text{ und } \Phi_3$$

ergeben sondern nur die Differenz der Quadrate dieser Funktionen, stimmt damit, dass zur Kenntnis der Potenzebene zweier Kugeln von gegebenen Mittelpunkten nicht die Kenntnis von deren Radien selbst sondern nur von der Differenz der Quadrate dieser Radien erforderlich ist.

Aus den Gleichungen 10. kann man noch nachstehende Folgerung ziehen:

Geht man von einer bestimmten

Raumkurve als Wendungskurve der Einhüllungsfläche der Potenzebenen aus,

Fläche als Einhüllungsfläche der Potenzebenen aus,

so kann man über den Ort der Mittelpunkte der Kugeln des einen Kugelsystems und über das Gesetz der Zuordnung der Kugeln der beiden Systeme beliebig verfügen. Durch jede solche Verfügung sind dann zwei Systeme von paarweise einander zugeordneten Kugeln bestimmt, deren Potenzebenen

die Fläche einhüllen, von der obige Raumkurve die Wendungskurve ist.

obige Fläche einhüllen.

Die Einhüllungsfläche der Potenzebenen ist eine Cylinderfläche, wenn ihre Charakteristiken dieselbe

Richtung haben, d. h. wenn die Grössen

$$\frac{\frac{d}{da} u}{\frac{d}{da} v}, \frac{\frac{d}{da} v}{\frac{d}{da} w}, \frac{\frac{d}{da} w}{\frac{d}{da} u}$$

$$\frac{\frac{d}{da} u}{\frac{d}{da} w}, \frac{\frac{d}{da} v}{\frac{d}{da} u}, \frac{\frac{d}{da} w}{\frac{d}{da} v}$$

konstant sind, oder auch, wenn von mindestens einer der Gleichungen 8a. die rechte Seite den Wert ∞ hat, die Einhüllungsfläche ist eine Kegelfläche, wenn ihre Wendungskurve in einen im Endlichen liegenden Punkt zusammenschrumpft, wenn also die rechten Seiten der Gleichungen 8a. konstant sind, keine derselben jedoch den Wert ∞ hat.

Setzt man $z = F_1 = \Phi_2 = 0$, so wird

$$X = -a^2 + \Phi^2 - F^2 + \Phi_1^2 + \Omega, w = \infty,$$

mithin geht dann Gleichung 7a. über in:

$$7b. \quad \frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1.$$

Aus 7b. und der daraus durch partielle Differentiation nach a sich ergebenden Gleichung folgt:

$$8b. \quad \begin{cases} x = \frac{\frac{d}{da} v}{\frac{d}{da} u}, \\ y = \frac{\frac{d}{da} u}{\frac{d}{da} v}. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen folgt auch aus der zweiten Gleichung 8., während die zweite Gleichung 8b. auch aus der Gleichung der Seitenrisse der durch die Gleichungen 8. dargestellten Geraden:

$$y \cdot \frac{\frac{d}{da} u}{\frac{d}{da} v} + z \frac{\frac{d}{da} u}{\frac{d}{da} w} = \frac{d}{da} u$$

hergeleitet werden kann.

Die Gleichungen 8b. lösen nun, wie man leicht einsieht, die Aufgabe:

Zwei Kreissysteme der $xy = \text{Ebene}$ seien gegeben durch die Gleichungen:

$$4a. \quad (x - a)^2 + [y - F(a)]^2 = [F_2(a)]^2,$$

$$6a. \quad [x - \Phi(a)]^2 + [y - \Phi_1(a)]^2 = [\Phi_3(a)]^2.$$

Die demselben Wert des Parameters a entsprechenden Kreise der beiden Systeme seien einander zugeordnet. Je zwei einander zugeordnete Kreise

besitzen eine Potenzlinie. Es ist die Gleichung der Einhüllungskurve aller dieser Potenzlinien zu bestimmen*).

Für diese Aufgabe kommt den Gleichungen:

$$9a. \frac{X}{2(\Phi - a)} = u, \frac{X}{2(\Phi_1 - F)} = v$$

und:

$$10a. \begin{cases} \frac{X}{2(\Phi - a)} = \frac{U_{da}^d V - V_{da}^d U}{\frac{d}{da} V}, \\ \frac{X}{2(\Phi_1 - F)} = \frac{V_{da}^d U - U_{da}^d V}{\frac{d}{da} U} \end{cases}$$

ganz die der Bedeutung der Gleichungen 9. und 10. entsprechende Bedeutung zu.

Die Potenzlinien sind alle parallel, wenn $\frac{v}{u}$ konstant ist, sie gehen alle durch denselben Punkt, wenn

$$\frac{\frac{d}{da} v}{\frac{d}{da} u} \text{ und } \frac{\frac{d}{da} u}{\frac{d}{da} v}$$

konstant sind.

Zum Schluss sei bemerkt: Da dieselbe Einhüllungsfläche unzählig vielen Werten von U , V und W entspricht, so entspricht sie auch unzählig vielen Werten von u , v und w .

II.

A.

§. 5.

Ist z. B.

$$\begin{array}{l|l} u = \mu a + b, & u = \mu a + v b + c, \\ v = \mu_1 a + b_1, & v = \mu_1 a + v_1 b + c_1, \\ w = \mu_2 a + b_2, & w = \mu_2 a + v_2 b + c_2, \end{array}$$

*) Setzt man in den Gleichungen 8. $z=0$, so kann man aus ihnen, welches auch der Wert von w sei, Gleichungen ableiten, welche der Form nach mit den Gleichungen 8b. identisch sind. Die durch die Gleichungen 8b. dargestellte Einhüllungskurve ist folglich mit der (von w ganz unabhängigen) Grundspur der durch die Gleichungen 8. dargestellten Einhüllungsfläche identisch, wenn die Werte von u und v für diese und für jene dieselben sind.

so ist, wenn $e_m f_n - e_n f_m$ mit $D(e_m f_n)$ bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \frac{w}{u} &= \frac{D(b\mu_2)}{(\mu a + b)^2}, \quad \frac{d}{da} \frac{w}{v} = \frac{D(b_1\mu_2)}{(\mu_1 a + b_1)^2}, \quad \frac{d}{da} w = \mu_2, & \frac{\partial}{\partial a} u &= \mu, \quad \frac{\partial}{\partial a} v = \mu_1, & \frac{\partial}{\partial a} w &= \mu_2, \\ \frac{d}{da} \frac{v}{u} &= \frac{D(b\mu_1)}{(\mu a + b)^2}, \quad \frac{d}{da} \frac{v}{w} = \frac{D(b_2\mu_1)}{(\mu_2 a + b_2)^2}, \quad \frac{d}{da} v = \mu_1, & \frac{\partial}{\partial a} \frac{u}{v} &= \frac{D(r_1\mu) \cdot b + D(c_1\mu)}{(\mu_1 a + r_1 b + c_1)^2}, & \frac{\partial}{\partial a} \frac{u}{w} &= \frac{D(r_2\mu) \cdot b + D(c_2\mu)}{(\mu_2 a + r_2 b + c_2)^2}, \\ & & \frac{\partial}{\partial a} \frac{v}{u} &= \frac{D(r_1\mu_1) \cdot b + D(c_1\mu_1)}{(\mu a + r_1 b + c)^2}, & \frac{\partial}{\partial a} \frac{v}{w} &= \frac{D(r_2\mu_1) \cdot b + D(c_2\mu_1)}{(\mu_2 a + r_2 b + c_2)^2}, \\ & & \frac{\partial}{\partial a} \frac{w}{u} &= \frac{D(r_1\mu_2) \cdot b + D(c_1\mu_2)}{(\mu a + r_1 b + c)^2}, & \frac{\partial}{\partial a} \frac{w}{v} &= \frac{D(r_2\mu_2) \cdot b + D(c_2\mu_2)}{(\mu_1 a + r_1 b + c_1)^2}, \\ & & \frac{\partial}{\partial b} u &= r, \quad \frac{\partial}{\partial b} v = r_1, & \frac{\partial}{\partial b} w &= r_2, \\ & & \frac{\partial}{\partial b} \frac{u}{v} &= \frac{D(\mu_1 r) a + D(c_1 r)}{(\mu_1 a + r_1 b + c_1)^2}, & \frac{\partial}{\partial b} \frac{u}{w} &= \frac{D(\mu_2 r) a + D(c_2 r)}{(\mu_2 a + r_2 b + c_2)^2}, \\ & & \frac{\partial}{\partial b} \frac{v}{u} &= \frac{D(\mu r_1) a + D(c r_1)}{(\mu a + r b + c)^2}, & \frac{\partial}{\partial b} \frac{v}{w} &= \frac{D(\mu_2 r_1) a + D(c_2 r_1)}{(\mu_2 a + r_2 b + c_2)^2}, \\ & & \frac{\partial}{\partial b} \frac{w}{u} &= \frac{D(\mu r_2) a + D(c r_2)}{(\mu a + r b + c)^2}, & \frac{\partial}{\partial b} \frac{w}{v} &= \frac{D(\mu_1 r_2) a + D(c_1 r_2)}{(\mu_1 a + r_1 b + c_1)^2}, \end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, dass die Differentialquotienten nach b aus denen nach a hervorgehen, wenn man in letzteren a anstelle von b , b anstelle von a , μ anstelle von r , r anstelle von μ setzt, und umgekehrt.

Mithin lauten die Gleichungen 8. in diesem Fall:

$$11. \begin{cases} y = -x \cdot \frac{D(b\mu_2)(\mu_1 a + b_1)^2}{D(b_1\mu_2)(\mu a + b)^2} + \frac{\mu_2(\mu_1 a + b_1)^2}{D(b_1\mu_2)}, \\ z = -x \cdot \frac{D(b\mu_1)(\mu_2 a + b_2)^2}{D(b_2\mu_1)(\mu a + b)^2} + \frac{\mu_1(\mu_2 a + b_2)^2}{D(b_2\mu_1)}. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{(\mu a + r b + c)^2 D(\mu_1 r_2)}{c D(\mu_1 r_2) + c_1 D(\mu_2 r) + c_2 D(\mu r_1)}, \\ y = \frac{(\mu_1 a + r_1 b + c_1)^2 D(\mu_2 r)}{c D(\mu_1 r_2) + c_1 D(\mu_2 r) + c_2 D(\mu r_1)}, \\ z = \frac{(\mu_2 a + r_2 b + c_2)^2 D(\mu r_1)}{c D(\mu_1 r_2) + c_1 D(\mu_2 r) + c_2 D(\mu r_1)}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man

durch Elimination von a eine Gleichung dritten Grads als Gleichung der Einhüllungsfläche, welche demnach eine Fläche dritter Ordnung ist.

Die Gleichungen der Spuren dieser Fläche in den Koordinatenebenen findet man, indem man in den Gleichungen 11. einmal z , dann y und dann x gleich Null setzt und darauf aus jedem der so entstandenen Gleichungenpaare a eliminiert. Dann ergibt sich, wenn noch eine leicht ersichtliche Reduktion vorgenommen wird:

folgende Gleichungen, wenn man die Koeffizienten der Quadrate rechts bezüglich gleich $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k_1}$, $\frac{1}{k_2}$ setzt und zwei leicht ersichtliche Reduktionen vornimmt:

$$\begin{aligned} (k x)^{\frac{1}{2}} &= \mu a + r b + c, \\ (k_1 y)^{\frac{1}{2}} &= \mu_1 a + r_1 b + c_1, \\ (k_2 z)^{\frac{1}{2}} &= \mu_2 a + r_2 b + c_2. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich durch Elimination von a und b die Gleichung:

$$\left(\frac{x \mu_1}{D(b \mu_1)}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y \mu}{D(b_1 \mu)}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\left(\frac{x \mu_2}{D(b \mu_2)}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{z \mu}{D(b_2 \mu)}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\left(\frac{y \cdot \mu_2}{D(b_1 \mu_2)}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{z \mu_1}{D(b_2 \mu_1)}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Setzt man

$$\frac{D(b \mu_1)}{\mu_1} = p, \quad \frac{D(b_1 \mu)}{\mu} = q,$$

$$\frac{D(b \mu_2)}{\mu_2} = p_1, \quad \frac{D(b_2 \mu)}{\mu} = r,$$

so gehen die Gleichungen der Spuren über in folgende:

$$\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{q}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{z}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\left(\frac{y}{\frac{q}{p}(p-p_1)}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{z}{\frac{r}{p_1}(p_1-p)}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

$$\begin{vmatrix} (kx)^{\frac{1}{2}} - c & \mu & v \\ (k_1 y)^{\frac{1}{2}} - c_1 & \mu_1 & v_1 \\ (k_2 z)^{\frac{1}{2}} - c_2 & \mu_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man den Nenner in den Gleichungen 11. gleich 1, so kann die letzte Gleichung geschrieben werden:

$$\left(\frac{l x}{D(\mu_1 v_2)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot D(\mu_1 v_2) + \left(\frac{l y}{D(\mu_2 v)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot D(\mu_2 v) + \left(\frac{l z}{D(\mu v_1)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot D(\mu v_1) = l,$$

woraus folgt:

$$11a. \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{k_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{z}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Entfernt man aus dieser Gleichung die gebrochenen Exponenten, so erhält man die Gleichung:

$$64 \frac{x}{k} \frac{y}{k_1} \frac{z}{k_2} = \left(1 + \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k_1^2} + \frac{z^2}{k_2^2} - 2 \frac{x}{k} \frac{y}{k_1} - 2 \frac{x}{k} \frac{z}{k_2} - 2 \frac{y}{k_1} \frac{z}{k_2} - 2 \frac{x}{k} - 2 \frac{y}{k_1} - 2 \frac{z}{k_2}\right)^2.$$

Die Einhüllungsfläche ist mithin eine Fläche vierter Ordnung. Sie bleibt so lange dieselbe als k, k_1, k_2 dieselben Werte haben, welches auch die Werte der μ, v und c seien.

Die Gleichungen der Spuren dieser Fläche in den Koordinatenebenen resultieren, wenn man in 11a. einmal z , dann y und dann x gleich Null setzt, wodurch man erhält:

$$\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{k_1}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{z}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\left(\frac{x}{k_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{z}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Diskutiert man diese Gleichungen der Spuren, so findet man, dass sie Parabeln darstellen, welche die Axen ihrer Koordinatenebenen in Punkten berühren, deren Abstände vom Koordinatenanfangspunkt gleich den Divisoren der gleichnamigen Koordinaten in den Gleichungen der Spuren sind. Die Sehnen der Parabeln, welche den Verbindungssehnen derjenigen Punkte parallel sind, in denen die Parabeln die Axen ihrer Koordinatenebenen berühren, werden von den anderen Diagonalen der Rechtecke halbiert, von denen der Koordinatenanfangspunkt und die Berührungspunkte der Parabeln mit den Axen ihrer Koordinatenebenen

je drei Eckpunkte sind. Daraus folgt, dass die zwischen den Parabeln und Koordinatenachsen gelegenen Teile der zu jenen Sehnen gehörigen Sekanten bei jeder Sekante einander gleich sind.

Die obige Form der Gleichungen der Parabeln führt zu einer einfachen Konstruktion derselben.

Was die Lage der Axen und die Werte der Koordinaten der Scheitel und der Parameter derartig gelegener Parabeln betrifft, so ist z. B., wenn α den Winkel, gerechnet von der $+x =$ nach der $+y =$ Axe, bezeichnet, welchen die $+x =$ Axe mit der Axe der Parabel

$$\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

bildet, $\tan \alpha = \frac{n}{m}$; die Koordinaten des Scheitels sind: $y_0 = m n \frac{m^2 - n^2}{\sqrt{(m^2 + n^2)^3}}$, $x_0 = \frac{m^2 n^2}{\sqrt{(m^2 + n^2)^3}}$, während das Parameter den Wert $\frac{4 m^2 n^2}{\sqrt{(m^2 + n^2)^3}}$ hat.

§. 6.

Für die eingangs des §. 5. angenommenen Werte von u , v , w ist

$$\frac{\frac{d}{da} \frac{v}{\frac{da}{da} \frac{v}}{\frac{da}{da} \frac{v}}}{\frac{da}{da} \frac{v}} = \frac{2 \mu_1 \mu_2 (\mu_2 a + b_2)}{D(b_2 \mu_1)},$$

$$\frac{\frac{d}{da} \frac{v}{\frac{da}{da} \frac{v}}{\frac{da}{da} \frac{v}}}{\frac{da}{da} \frac{v}} = \frac{2 D(b \mu_1) \cdot D(b \mu_2) \cdot (\mu_2 a + b_2)}{D(b_2 \mu_1) (\mu a + b)^3},$$

während

$$\frac{\frac{d}{da} \frac{w}{\frac{da}{da} \frac{w}}{\frac{da}{da} \frac{w}}}{\frac{da}{da} \frac{w}}, \frac{\frac{d}{da} \frac{v}{\frac{da}{da} \frac{v}}{\frac{da}{da} \frac{v}}}{\frac{da}{da} \frac{v}}, \frac{\frac{d}{da} \frac{u}{\frac{da}{da} \frac{u}}{\frac{da}{da} \frac{u}}}{\frac{da}{da} \frac{u}}, \frac{\frac{d}{da} \frac{u}{\frac{da}{da} \frac{u}}{\frac{da}{da} \frac{u}}}{\frac{da}{da} \frac{u}}$$

bezüglich zu den Werten von

$$\frac{\frac{d}{da} \frac{v}{\frac{da}{da} \frac{v}}{\frac{da}{da} \frac{v}}}{\frac{da}{da} \frac{v}} \text{ und } \frac{\frac{d}{da} \frac{v}{\frac{da}{da} \frac{v}}{\frac{da}{da} \frac{v}}}{\frac{da}{da} \frac{v}}$$

symmetrische Werte besitzen. Setzt man alle diese Werte in die Gleichungen 8a. ein, so gehen dieselben über in:

$$x = \frac{\mu_1 \mu_2 (\mu a + b)^3}{D(b \mu_1) D(b \mu_2)},$$

$$y = \frac{\mu_2 \mu (\mu_1 a + b_1)^3}{D(b_1 \mu_2) D(b_1 \mu)},$$

$$z = \frac{\mu \mu_1 (\mu_2 a + b_2)^3}{D(b_2 \mu) D(b_2 \mu_1)}.$$

Weitere Untersuchungen führen zu folgenden Resultaten:

Die Einhüllungsfläche liegt ganz in einem der von den Koordinatenebenen gebildeten Oktanten des Raumes. Sie berührt die Koordinatenebenen in den gleichnamigen Spuren und die Axen in Entfernungen, welche gleich den Divisoren der gleichnamigen Koordinaten in Gleichung 11a. sind. Legt man durch die Fläche ein System von Ebenen, welche einer der Koordinatenebenen parallel sind, so schneidet jede Ebene dieses Systems die Fläche in zwei Parabeln, einer von grösserer und einer von geringerer Weite, welche die beiden anderen Koordinatenebenen in Punkten der gleichnamigen Spuren der Einhüllungsfläche berühren, und zwar sind die Berührungspunkte der schmälern Parabel der den berührten Koordinatenebenen gemeinsamen Axe benachbart, während die Berührungspunkte der weiteren Parabel mehr von ihr entfernt sind. Mit wachsender Entfernung der Schnittebene von der parallelen Koordinatenebene nimmt die Weite der weiteren Parabel immerfort zu, während die der weniger weiten Parabel zunächst kontinuierlich abnimmt, bis diese Parabel in eine Gerade zusammenschrumpft in derjenigen Entfernung von der parallelen Koordinatenebene, welche gleich dem Abstand des Berührungspunktes der auf ihr senkrechten Axe vom Koordinatenanfangspunkt ist. Von da an nimmt die Weite auch der weniger weiten Parabel stets zu. Jene Gerade, in welche die schmälere Parabel zusammenschrumpft, verbindet den eben

Die Gleichungen, welche durch Elimination von a aus je zweien dieser Gleichungen entstehen, können leicht auf die Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} \left(x \frac{\mu_1^2 D(b \mu_2)}{D^2(b \mu_1) \mu_2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(y \frac{\mu^2 D(b_1 \mu_2)}{D^2(b_1 \mu) \mu_2}\right)^{\frac{1}{3}} &= 1, \\ \left(x \frac{\mu_2^2 D(b \mu_1)}{D^2(b \mu_2) \mu_1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(z \frac{\mu^2 D(b_2 \mu_1)}{D^2(b_2 \mu) \mu_1}\right)^{\frac{1}{3}} &= 1, \\ \left(y \frac{\mu_2^2 D(b_1 \mu)}{D^2(b_1 \mu_2) \mu}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(z \frac{\mu_1^2 D(b_2 \mu)}{D^2(b_2 \mu_1) \mu}\right)^{\frac{1}{3}} &= 1. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen stellen die Projektionen der Wendungskurve der den angenommenen Werten von u, v, w entsprechenden Einhüllungsfläche der Potenzebenen dar. Setzt man

$$\begin{aligned} \frac{D^2(b \mu_1) \mu_2}{\mu_1^2 D(b \mu_2)} &= P, \quad \frac{D^2(b_1 \mu) \mu_2}{\mu^2 D(b_1 \mu_2)} = Q, \\ \frac{D^2(b \mu_2) \mu_1}{\mu_2^2 D(b \mu_1)} &= P_1, \quad \frac{D^2(b_2 \mu) \mu_1}{\mu^2 D(b_2 \mu_1)} = R, \end{aligned}$$

so lauten die Gleichungen der Projektionen der Wendungskurve:

$$11a. \begin{cases} \left(\frac{x}{P}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y}{Q}\right)^{\frac{1}{3}} = 1, \\ \left(\frac{x}{P_1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{z}{R}\right)^{\frac{1}{3}} = 1, \\ \left(\frac{y}{Q\left(1 - \left(\frac{P_1}{P}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{z}{R\left(1 - \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}} = 1. \end{cases}$$

Geht man auf die in §. 5. eingeführten Grössen p, q, p_1, r zurück, so erhält man als Gleichungen der Projektionen der Wendungskurve:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{\frac{p^2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y}{\frac{pq}{p-p_1}}\right)^{\frac{1}{3}} &= 1, \\ \left(\frac{x}{\frac{p_1^2}{p}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{z}{\frac{p_1 r}{p_1-p}}\right)^{\frac{1}{3}} &= 1, \\ \left(\frac{y}{\frac{pq}{p-p_1} \left(1 - \frac{p_1}{p}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{z}{\frac{p_1 r}{p_1-p} \left(1 - \frac{p}{p_1}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}} &= 1. \end{aligned}$$

genannten Berührungspunkt mit der dem Koordinatenanfangspunkt gegenüberliegenden Ecke desjenigen Parallelepipeds, welches gebildet wird von den durch die Berührungspunkte der Fläche mit den Axen auf den Axen abgeschnittenen Stücken als anstossenden Kanten. Die Verbindungslinien der auf den den Schnittebenen parallelen Axen gelegenen Berührungspunkte mit der dem Koordinatenanfangspunkt gegenüberliegenden Ecke des Parallelepipeds sind die Örter der Schnittpunkte der weiteren und schmälern Parabel.

Man erkennt, dass die Wendungskurve und also auch die Einhüllungsfläche dieselbe bleibt, so lange P, Q, P_1 und R oder p, q, p_1, r dieselben Werte haben, welches auch die Werte der μ und b seien. Entfernt man aus den Gleichungen der Projectionen der Wendungskurve die gebrochenen Exponenten, so findet man Gleichungen dritten Grads, z. B. erhält man anstelle der ersten Gleichung 11a.:

$$27 \frac{x}{P} \cdot \frac{y}{Q} = \left(1 - \frac{x}{P} - \frac{y}{Q}\right)^3.$$

Die Projectionen der Wendungskurve sind also Kurven dritter Ordnung. Diskutiert man ihre Gleichungen, so findet man Folgendes:

Die Projectionen berühren die Axen ihrer Koordinatenebenen in Punkten, deren Abstände vom Koordinatenanfangspunkt gleich den Divisoren der gleichnamigen Koordinaten in der betreffenden Projektionsgleichung sind, so wie sich diese unter den Gleichungen 11a. oder den drei auf sie folgenden Gleichungen findet. Zwischen dem Koordinatenanfangspunkt und den Berührungspunkten kehren die Projectionen den berührten Axen die konvexe Seite zu, ebenso über die Berührungspunkte hinaus, so dass von diesen ab die Entfernungen der Punkte der Projectionen von den berührten Axen immerfort bis zu unendlich grossen Werten wachsen. Die Berührungspunkte mit den Axen sind Wendepunkte. Spitzen und Asymptoten u. s. w. sind nicht vorhanden. Alle Sehnen, welche den Verbindungslinien der Berührungspunkte mit den Axen parallel sind, werden von den anderen Diagonalen der Reckecke halbiert, von denen der Koordinatenanfangspunkt und die Berührungspunkte mit den Axen der der betreffenden Projektion zugehörigen Koordinatenebene drei Eckpunkte sind.

Auf die Gleichungen 11a. oder die auf sie folgenden Gleichungen lässt sich eine einfache Konstruktion der Projectionen gründen.

Diejenigen Teile der Verlängerungen der oben erwähnten Sehnen, welche zwischen den Projectionen und den Axen der zugehörigen Koordinatenebenen liegen, sind bei jeder der Sehnen einander gleich.

Die Sehnen sind die Grund- bzw. Auf- bzw. Seitenrisse von Sehnen der Wendungskurve. Die Mittelpunkte der Sehnen eines jeden dieser drei Sehnen-systeme der Wendungskurve liegen auf einer Geraden.

Beweis:

Es sind z. B., wenn m eine beliebige Zahl bedeutet,

$$x_1 = m P, y_1 = m Q \left(1 - m^{\frac{1}{3}}\right)^3,$$

$$x_2 = P \left(1 - m^{\frac{1}{3}}\right)^3, y_2 = m Q$$

die Koordinaten zweier beliebigen Punkte des Grundrisses der Wendungskurve, deren Verbindungssehne von der zweiten Diagonale desjenigen der oben angeführten Rechtecke halbiert wird, welches in der Grundrissebene liegt. Die z = Koordinaten der zu diesen Punkten des Grundrisses gehörigen Punkte der Wendungskurve sind:

$$z_1 = R \left(1 - \left(m \frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3,$$

$$z_2 = R \left(1 + \left(m \frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3.$$

Die Koordinaten des Mittelpunkts der Verbindungssehne dieser Punkte der Wendungskurve sind mithin:

$$\xi = \frac{P}{2} \left(1 - 3m^{\frac{1}{3}} + 3m^{\frac{2}{3}}\right),$$

$$\eta = \frac{Q}{2} \left(1 - 3m^{\frac{1}{3}} + 3m^{\frac{2}{3}}\right),$$

$$\zeta = \frac{R}{2} \left(2 - \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \left[\left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - 3m^{\frac{1}{3}} + 3m^{\frac{2}{3}}\right) + 1 - \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

Eliminiert man m aus diesen Gleichungen, so erhält man:

$$\eta = \frac{Q}{P} \cdot \xi,$$

$$\zeta = \frac{R}{2} \left(2 - \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \left[2 \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\xi}{P} + 1 - \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{3}}\right],$$

$$\zeta = \frac{R}{2} \left(2 - \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \left[2 \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\eta}{Q} + 1 - \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

Diese Gleichungen stellen aber eine Gerade dar, und zwar schneidet dieselbe die z = Axe.

Es sind also drei Systeme von Sehnen der Wendungskante vorhanden, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen. Die drei Geraden schneiden einander nicht.

Setzt man die eingangs des §. 5. eingeführten Werte von u und v in die Gleichungen 8b. ein und eliminiert a aus den erhaltenen Gleichungen, so erhält man als Gleichung der Einhüllungskurve der Potenzlinien eine Gleichung, welche sich auf die Form bringen lässt:

$$11b. \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{q}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

worin p und q die bekannten Werte besitzen. Dieses Resultat stimmt mit der Anmerkung auf S. 11. Die Einhüllungskurve ist eine Parabel von der oben beschriebenen Lage, welche so lange dieselbe bleibt als p und q dieselben Werte haben, welches auch die Werte von μ , μ_1 , b , b_1 seien.

B.

§. 7.

Spezial-Aufgabe 1.

Eine Kugel von konstantem Radius r_1 bewegt sich so, dass ihr Mittelpunkt auf der Peripherie eines festen Kreises von dem Radius r hingleitet.

auf der Oberfläche einer festen Kugel vom Radius r hingleitet so zwar, dass er der Reihe nach mit sämtlichen Punkten dieser Oberfläche zusammenfällt.

Jede Lage der beweglichen Kugel bestimmt im Verein mit einer festen Kugel vom Radius r_2 eine Potenzebene. Es ist die Einhüllungsfläche aller dieser Potenzebenen zu finden.

Um diese Aufgabe zu lösen, wählen wir

die durch den Mittelpunkt der festen Kugel und des festen Kreises gehende und auf der Ebene des Kreises senkrechte Ebene etwa als $yz =$ Ebene, die im Mittelpunkt der festen Kugel auf dieser Ebene senkrecht stehende Gerade als $x =$ Axe und nehmen die $xy =$ Ebene parallel zur Ebene des Kreises an.

den Mittelpunkt der festen Kugel vom Radius r_2 als Koordinatenanfangspunkt und die Verbindungslinie der Mittelpunkte der festen Kugeln etwa als $y =$ Axe.

Bezeichnen wir dann

die $y =$ und $z =$ Koordinate des Mittelpunkts des Kreises bezüglich mit q und c , so ist:

$$F = q + \sqrt{r^2 - a^2}, F_1 = c, F_2 = r, \\ \Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = 0, \Phi_3 = r_2.$$

die $y =$ Koordinate des Mittelpunkts der festen Kugel vom Radius r mit q , so ist:

$$F = \sqrt{r^2 - a^2 - (b - q)^2}, F_1 = r_1, \\ \Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = 0, \Phi_3 = r_2.$$

Mithin ist, wenn

$$r_2^2 - r_1^2 + r^2 + q^2 + c^2 = 2k \mid r_2^2 - r_1^2 + r^2 - q^2 = 2k$$

gesetzt wird:

$$\begin{array}{l|l} u = \frac{k + q\sqrt{r^2 - a^2}}{a}, & u = \frac{k + bq}{a}, \\ v = \frac{k + q\sqrt{r^2 - a^2}}{q + \sqrt{r^2 - a^2}}, & v = \frac{k + bq}{b}, \\ w = \frac{k + q\sqrt{r^2 - a^2}}{c}. & w = \frac{k + bq}{\sqrt{r^2 - a^2} - (b - q)^2}. \end{array}$$

Führt man diese Werte in die Gleichungen 8. ein und eliminiert dann

$$a \mid a \text{ und } b$$

aus denselben, so erhält man eine Gleichung, welche geschrieben werden kann:

$$\begin{array}{l|l} 12. \quad r^2 x^2 + (r^2 - q^2) y^2 - c^2 z^2 - 2qcyz + 2(k - r^2)qy & r^2 x^2 + (r^2 - q^2) y^2 + r^2 z^2 + 2q(k^2 + q^2 - r^2)y \\ + 2ckz - k^2 + r^2 q^2 = 0. & - (k + q^2)^2 + q^2 r^2 = 0. \end{array}$$

Dies ist eine Gleichung zweiten Grads, folglich ist die Einhüllungsfläche eine Fläche zweiter Ordnung.

Diese Fläche kann nur eine Kegel- oder Cylinderfläche sein, denn bei den anderen Flächen zweiter Ordnung, welche von Systemen von Geraden gebildet werden, schneiden die benachbarten Geraden dieser Systeme einander nicht. In der That, setzt man die obigen Werte von u , v und w in die Gleichungen 8a. ein, so ergibt sich:

$$x = 0, y = q, z = \frac{k - q^2}{c}.$$

Die Fläche ist also eine Kegelfläche, wenn weder $r = \infty$ noch $c = 0$. $0, q, \frac{k - q^2}{c}$ sind dann die Koordinaten des Scheitels. Ist dagegen $r = \infty$ oder $c = 0$, so ist die Einhüllungsfläche eine Cylinderfläche.

Da in der Gleichung 12 nur die Quadrate von x und z vorkommen und die Koeffizienten dieser Quadrate einander gleich sind, so ist die Einhüllungsfläche eine Rotationsfläche, deren Rotationsaxe die $y = \text{Axe}$ ist.

Wir untersuchen nach einander die Fälle » $r = \infty$ « und » r endlich«.

$$1. r = \infty.$$

Um die diesem Falle entsprechende Spezialform von Gleichung 12. zu finden, setzen wir in derselben $q_1 + r$ anstelle von q , dividieren dann die Gleichung durch r^2 und erteilen darauf r den Wert ∞ . Dann erhalten wir:

$$12a. \quad x^2 + 2q_1 y + 2cz - (r_2^2 - r_1^2 + c^2 + q_1^2) = 0. \mid x^2 + z^2 + 2q_1 y - (r_2^2 - r_1^2 + q_1^2) = 0.$$

q_1 hat ursprünglich die Bedeutung der $y =$ Koordinate des Endpunkts desjenigen Radius'

des festen Kreises, | der festen Kugel vom Radius r ,

welcher die Richtung der negativen $y = \text{Axe}$ besitzt. Nach dem Grenzübergang bedeutet q_1 den Abstand der festen Geraden, in welche der feste Kreis ausartet, von der $xz = \text{Ebene}$.

Nach dem Grenzübergang bedeutet q_1 den Abstand der festen Ebene, in welche die feste Kugel vom Radius r ausartet,

Die Gleichung 12a. lässt erkennen, dass die Einhüllungsfläche für $r = \infty$ die Oberfläche eines parabolischen Cylinders | eines Rotationsparaboloids

darstellt, deren Schnitt mit der $xy = \text{Ebene}$ die Parabel

$$x^2 = -2q_1 \left(y - \frac{r_2^2 - r_1^2 + c^2 + q_1^2}{2q_1} \right)$$

ist. Der Winkel β , gerechnet von der positiven $y =$ nach der positiven $z = \text{Axe}$, welchen die in der $yz = \text{Ebene}$ gelegene Seitenlinie des Cylinders mit der positiven $y = \text{Axe}$ bildet, ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\tan \beta = -\frac{q_1}{c}.$$

Diejenigen Parabeln, welche die Schnitte von auf den Seitenlinien senkrechten Ebenen mit der Cylinderfläche sind, haben ein Halbparameter gleich $\sqrt{c^2 + q_1^2}$, also gleich der Entfernung der festen Geraden vom Koordinatenanfangspunkt. Aus dem Wert von $\tan \beta$ folgt, dass die Seitenlinien der Cylinderfläche auf der durch den Koordinatenanfangspunkt und die feste Gerade bestimmten Ebene senkrecht stehen.

Durch vorstehende Erörterungen ist die Aufgabe gelöst worden:

Der Mittelpunkt einer Kugel von konstantem Radius r_1 gleitet auf einer festen Geraden hin.

auf einer festen Ebene hin so zwar, dass er der Reihe nach mit allen Punkten dieser Ebene zusammenfällt.

Jede Lage dieser Kugel bestimmt im Verein mit einer festen Kugel vom Radius r_2 eine Potenzebene. Es ist die Einhüllungsfläche aller dieser Potenzebenen zu finden.

§. 8.

2. r endlich.

Wenn r endlich

und c von Null verschieden |

ist, stellt Gleichung 12.

eine Kegelfläche dar, wie bereits oben bemerkt wurde. Die Grundspur dieser Kegelfläche wird durch die Gleichung

$$r^2 x^2 + (r^2 - q^2) y^2 + 2q(k - r^2)y - k^2 + r^2 q^2 = 0$$

repräsentiert, welche eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel

ein Rotationsellipsoid, = Paraboloid oder = Hyperboloid dar, je nachdem $r \geq q$. Das Rotationsellipsoid ist eiförmig, das Rotationshyperboloid zweischalig. Der Mittelpunkt beider ist vom Koordinatenanfangspunkt um $q \frac{r^2 - q^2 - k}{r^2 - q^2}$ entfernt. Die grosse Axe

darstellt, je nachdem $r \geq q$. Die y =Koordinate des Mittelpunkts der Ellipse und der Hyperbel ist gleich $q \frac{r^2 - k}{r^2 - q^2}$, die des Scheitelpunkts der Parabel gleich $\frac{r_2^2 - r_1^2 + 4q^2 + c^2}{4q}$. Die mit der y = Axe zusammenfallende grosse Axe der Ellipse ist gleich $\frac{\pm 2r(k - q^2)}{r^2 - q^2}$, die mit derselben Koordinatenaxe zusammenfallende reelle Axe der Hyperbel gleich $\frac{\pm 2r(k - q^2)}{q^2 - r^2}$. Die anderen Axen der Ellipse und Hyperbel sind bezüglich gleich $\frac{\pm 2(k - q^2)}{\sqrt{r^2 - q^2}}$ und $\frac{\pm 2(k - q^2)}{\sqrt{q^2 - r^2}}$. Das Halbparameter der Parabel hat den Wert $\frac{r_1^2 - r_2^2 - c^2}{2q}$.

Transformiert man die Gleichung der Kegelfläche auf deren Scheitel als Anfangspunkt der Koordinaten und auf Koordinatenebenen, welche den entsprechenden alten Koordinatenebenen parallel sind, so geht sie über in:

$$r^2 x^2 + (r^2 - q^2) y^2 - c^2 z^2 - 2qcyz = 0.$$

Aus dieser Gleichung wird das Glied mit yz entfernt durch Drehung der xy =Ebene um die x =Axe um einen Winkel α , gerechnet von der positiven y = nach der positiven z =Axe, welcher bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\tan 2\alpha = -\frac{2qc}{r^2 - q^2 + c^2}.$$

Die Gleichung der Kegelfläche nimmt durch diese Drehung die Form an:

$$\text{12b. } r^2 x^2 + \left(\frac{r^2 - q^2 - c^2}{2} - qc \sqrt{1 + \frac{(r^2 - q^2 + c^2)^2}{4q^2 c^2}} \right) y^2 + \left(\frac{r^2 - q^2 - c^2}{2} + qc \sqrt{1 + \frac{(r^2 - q^2 + c^2)^2}{4q^2 c^2}} \right) z^2 = 0.$$

Wie sich unschwer nachweisen lässt, ist hierin der Koeffizient von y^2 negativ und der von z^2 positiv, wenn $qc > 0$, wenn dagegen $qc < 0$, so findet das Umgekehrte statt. Daraus folgt, dass im ersteren Fall die Axe der Kegelfläche mit der y =Axe, im letzteren mit der z =Axe des neuesten Koordinatensystems zusammenfällt. Hierbei ist unter der Axe der Kegelfläche diejenige durch den Scheitel gehende Gerade des Kegelraumes verstanden, welche auf den

des Ellipsoids ist gleich $\frac{\pm 2rk}{r^2 - q^2}$, die kleine gleich $\frac{\pm 2k}{\sqrt{r^2 - q^2}}$. Die reelle Axe des Hyperboloids ist gleich $\frac{\pm 2rk}{q^2 - r^2}$, die imaginäre gleich $\frac{\pm 2k}{\sqrt{q^2 - r^2}}$. Der Scheitel des Paraboloids ist vom Koordinatenanfangspunkt um $\frac{r_2^2 - r_1^2 + 4q^2}{4q}$ entfernt. Sein Halbparameter ist $\frac{r_1^2 - r_2^2}{2q}$. Soll überhaupt ein Paraboloid entstehen, so darf r_1 nicht gleich r_2 sein, denn wenn dies neben $r = q$ der Fall ist, so gehen die Potenzebenen sämtlich durch den Mittelpunkt der festen Kugel vom Radius r .

Ist $q = 0$, so ist die Einhüllungsfläche eine Kugel, deren Mittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt und deren Radius gleich $\frac{r_2^2 - r_1^2 + r^2}{2r}$ ist.

Damit ist eine neue Entstehungsart des eiförmigen Rotationsellipsoids, des Rotationsparaboloids und des zweischaligen Rotationshyperboloids gefunden, nämlich:

Bewegt sich eine Kugel so, dass ihr Mittelpunkt der Reihe nach mit sämtlichen Punkten einer festen Kugeloberfläche zusammenfällt, so hüllen ihre Potenzebenen inbezug auf eine zweite feste Kugel ein eiförmiges Rotationsellipsoid oder ein Rotationsparaboloid oder ein zweischaliges Rotationshyperboloid ein, je nachdem der Mittelpunkt der zweiten festen Kugel innerhalb, auf oder ausserhalb der Oberfläche der ersten festen Kugel liegt. Ein Rotationsparaboloid kann unter der angegebenen Bedingung jedoch nur dann entstehen, wenn der Radius der beweglichen Kugel nicht gleich dem Radius der zweiten festen ist.

Diese neue Entstehungsart der drei Flächen gestattet, sämtliche denselben gemeinsame Eigenschaften, welche sich auf Tangentialebenen beziehen, für alle zugleich abzuleiten.

Flächen derjenigen Schnittellipsen, von deren Mittelpunkten sie der Ort ist, senkrecht steht.

Ist $c=0$, so ist die Einhüllungsfläche in jedem Fall eine Cylinderfläche, deren Seitenlinien auf der xy = Ebene senkrecht stehen, und zwar ist sie dann eine parabolische Cylinderfläche nicht nur, wenn $r=\infty$, sondern auch, wenn $r=q$. Im ersteren Fall darf jedoch q_1 nicht gleich Null sein, da sonst alle Potenzebenen parallel sind, im letzteren Falle darf r_1 nicht gleich r_2 sein, da sonst alle Potenzebenen durch die im Mittelpunkt des festen Kreises auf der Kreisebene senkrechte Gerade gehen. Für $r=\infty$ lautet die Gleichung der Fläche und also auch die ihrer Grundspur:

$$x^2 = -2q_1 \left(y - \frac{r_2^2 - r_1^2 + q_1^2}{2q_1} \right),$$

während sie für $r=q$ lautet:

$$x^2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{q} \left(y - \frac{r_2^2 - r_1^2 + 4q^2}{4q} \right).$$

Aus diesen Gleichungen sind die Werte, welche y = Koordinate des Scheitels und Halbparameter der Spur in den beiden Fällen haben, ohne weiteres zu ersehen. Ist $r > q$, so ist die Einhüllungsfläche eine elliptische, ist $r < q$, so ist sie eine hyperbolische Cylinderfläche. Die Gleichungen dieser Flächen und damit auch die ihrer Grundspuren sind bezüglich:

$$\frac{\left(y - q \frac{r_1^2 - r_2^2 + r^2 - q^2}{2(r^2 - q^2)} \right)^2}{\left(\frac{r(r_2^2 - r_1^2 + r^2 - q^2)}{2(r^2 - q^2)} \right)^2} + \frac{x^2}{\left(\frac{r_2^2 - r_1^2 + r^2 - q^2}{2\sqrt{r^2 - q^2}} \right)^2} = 1,$$

$$\frac{\left(y - q \frac{r_1^2 - r_2^2 + r^2 - q^2}{2(r^2 - q^2)} \right)^2}{\left(\frac{r(r_2^2 - r_1^2 + r^2 - q^2)}{2(q^2 - r^2)} \right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{r_2^2 - r_1^2 + r^2 - q^2}{2\sqrt{q^2 - r^2}} \right)^2} = 1,$$

woraus die Werte der y = Koordinaten der Mittelpunkte sowie Lage und Grösse der Axen der Spuren unmittelbar ersichtlich sind. Für $q=0$ geht die Einhüllungsfläche in die Mantelfläche eines geraden Kreiscylinders über, dessen Grundradius gleich $\pm \frac{(r_2^2 - r_1^2 + r^2)}{2r}$ ist, und dessen Axe mit der z = Axe zusammenfällt.

Für $c=0$ gilt noch Folgendes, wie man leicht einsieht:

Die bewegliche Kugel wird

von der $xy =$ Ebene in grössten Kreisen geschnitten, deren Potenzlinien inbezug auf den Schnitt der $xy =$ Ebene mit der festen Kugel vom Radius r_2 die Schnitte derselben Ebene mit den

in denjenigen Lagen, in welchen sich ihr Mittelpunkt in der $xy =$ Ebene befindet,

den genannten Lagen der beweglichen Kugel entsprechenden

Potenzebenen sind. Mithin ist der Schnitt der $xy =$ Ebene mit der Einhüllungsfläche der Potenzebenen die Einhüllungskurve jener Potenzlinien. Hieraus folgen die Sätze:

1) *Bewegt sich ein Kreis in seiner Ebene so, dass sein Mittelpunkt auf einer festen Geraden der Ebene hingleitet, so umhüllen seine Potenzlinien inbezug auf einen festen Kreis der Ebene, dessen Mittelpunkt nicht auf der festen Geraden liegt, eine Parabel.*

2) *Bewegt sich ein Kreis in seiner Ebene so, dass sein Mittelpunkt auf der Peripherie eines festen Kreises der Ebene hingleitet, so umhüllen seine Potenzlinien inbezug auf einen zweiten festen Kreis der Ebene eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Mittelpunkt des zweiten festen Kreises innerhalb, auf oder ausserhalb der Peripherie des ersten festen Kreises liegt. Im zweiten Fall darf jedoch der Radius des beweglichen Kreises nicht gleich dem des zweiten festen sein, da sonst alle Potenzlinien durch den Mittelpunkt des ersten festen Kreises gehen.*

Diese Sätze können auch selbstständig vermittels der Gleichungen 8b. hergeleitet werden.

Der Satz 2 gibt eine neue gemeinschaftliche Entstehungsart der Kegelschnitte an. Dieselbe gestattet, die den Kegelschnitten gemeinsamen Eigenschaften, welche sich auf Tangenten beziehen, für alle Kegelschnitte zugleich nachzuweisen. Um z. B. den Satz des Brianchon so zu beweisen, hat man die Gleichung der Potenzlinien aufzustellen und in ihr $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ anstelle von a zu setzen. Dadurch erhält man die Gleichungen von sechs beliebigen Tangenten der Einhüllungskurve. Berechnet man die Koordinaten der Schnittpunkte der auf einander folgenden Tangenten, so hat man die Koordinaten der Ecken eines beliebigen Tangentensechsecks der Einhüllungskurve gefunden. Nunmehr stelle man die Gleichungen der Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken dieses Sechsecks auf. Die Determinante aus den Koeffizienten dieser Gleichungen ist gleich Null. Folglich gehen die Verbindungslinien durch denselben Punkt, w. z. b. w.

Den allgemeineren Fall, dass der Mittelpunkt der beweglichen Kugel sich auf einer Ellipse | auf einem Ellipsoid bewegt, lassen wir unerledigt.

C.

§. 9.

Die beiden folgenden Spezialaufgaben sind besondere Fälle der allgemeineren Aufgabe:

Der Mittelpunkt einer Kugel von konstantem Radius r_1 bewegt sich

auf einer ebenen Kurve, welche Symmetriegeraden besitzt.

Die soeben gelöste Spezialaufgabe sowie die beiden folgenden Spezialaufgaben

auf einer Rotationsfläche so zwar, dass er der Reihe nach mit jedem Punkt dieser Fläche zusammenfällt.

Jede Lage der beweglichen Kugel bestimmt im Verein mit einer festen Kugel vom Radius r_2 , deren Mittelpunkt

auf einer der Symmetriegeraden | auf der Axe der Rotationsfläche liegt, eine Potenzebene. Es ist die Einhüllungsfläche aller dieser Potenzebenen zu finden.

Daher lösen wir zunächst diese allgemeinere Aufgabe. Zu dem Ende wählen wir die Ebene der Kurve etwa als $xy = \text{Ebene}$ und die | die Axe der Rotationsfläche Symmetriegerade, auf welcher der Mittelpunkt der festen Kugel liegt,

etwa als $x = \text{Axe}$. Die $x = \text{Koordinate}$ des Mittelpunkts der festen Kugel sei p , während die Kurve | die Grundspur der Rotationsfläche

die Gleichung habe: $y = \pm f(x)$.

Bezeichnet man ferner $r_2^2 - r_1^2 - p^2$ mit $2k$, so ist:

$$\begin{aligned} u &= \frac{(f(a))^2 + a^2 + 2k}{2(a-p)}, & u &= \frac{(f(a))^2 + a^2 + 2k}{2(a-p)}, \\ v &= \frac{(f(a))^2 + a^2 + 2k}{2(\pm f(a))}, & v &= \frac{(f(a))^2 + a^2 + 2k}{2b}, \\ w &= \infty, & w &= \frac{(f(a))^2 + a^2 + 2k}{2(\pm \sqrt{(f(a))^2 - b^2})}, \end{aligned}$$

indem

$$F = \pm f(a), F_1 = 0, F_2 = r_1, \Phi = p, \Phi_1 = \Phi_2 = 0, \Phi_3 = r_2. \quad | \quad F = \pm \sqrt{(f(a))^2 - b^2}, F_1 = r_1, \Phi = p, \Phi_1 = \Phi_2 = 0, \Phi_3 = r_2.$$

Setzt man diese Werte von u, v und w in die Gleichungen 8. ein,

indem man zugleich berücksichtigt, dass $\frac{d}{da} \frac{w}{v} = 0$,

und löst die Gleichungen darauf nach x und y auf, so erhält man:

$$13. \begin{cases} x = \frac{1}{2} \frac{f^2 f' + 2af - (a^2 + 2k)f'}{f - (a-p)f'}, \\ y = \pm \frac{1}{2} \frac{f^2 - 2(a-p)ff' - a^2 + 2ap + 2k}{f - (a-p)f'}. \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \frac{f^2 f' + 2af - (a^2 + 2k)f'}{f - (a-p)f'}, \\ y &= \frac{1}{2} \frac{b f^2 - 2(a-p)ff' - a^2 + 2ap + 2k}{f - (a-p)f'}, \\ z &= \frac{1}{2} \frac{\pm \sqrt{f^2 - b^2} f^2 - 2(a-p)ff' - a^2 + 2ap + 2k}{f - (a-p)f'}. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen ist $f(a)$ mit f und $\frac{df(a)}{da}$ mit f' bezeichnet. Man findet aus ihnen durch Elimination

von a | von a und b

die Gleichung der Einhüllungsfläche.

Quadriert man die zweite und dritte Gleichung 13. und addiert die erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich:

$$y^2 + z^2 = \frac{1}{4} \frac{[f^2 - 2(a-p)ff' - a^2 + 2ap + 2k]^2}{[f - (a-p)f']^2}.$$

Die Gleichungen 13. sind mithin ersetzbar durch die Gleichungen:

$$13a. \begin{cases} x = \frac{1}{2} \frac{f^2 f' + 2af - (a^2 + 2k)f''}{f - (a-p)f'}, \\ y^2 + z^2 = \frac{1}{4} \frac{[f^2 - 2(a-p)ff'' - a^2 + 2ap + 2k]^2}{[f - (a-p)f']^2}, \end{cases}$$

aus welchen man durch Elimination von a die Gleichung der Einhüllungsfläche erhält. Aus den Gleichungen 13a.

Aus den Gleichungen 13.

erkennt man, dass die Einhüllungsfläche

eine Cylinderfläche ist, deren Seitenlinien auf der $xy =$ Ebene senkrecht stehen, und von welcher die $xz =$ Ebene eine Symmetrieebene ist.

gleichfalls eine Rotationsfläche ist, welche mit der gegebenen die Rotationsaxe gemein hat.

Zu demselben Resultat gelangt man auf dem Wege der Anschauung.

Für diejenigen Punkte der Einhüllungsfläche, welche in der $xy =$ Ebene liegen, ist $b = \pm f$. Setzt man diesen Wert in die zweite Gleichung 13. ein, so resultiert:

$$y = \pm \frac{1}{2} \frac{f^2 - 2(a-p)ff'' - a^2 + 2ap + 2k}{f - (a-p)f'}.$$

Daher gilt der Satz:

Die Grundspur der Einhüllungsfläche wird ebenfalls bestimmt durch die Gleichungen 13.

bestimmt durch die Gleichungen:

$$13b. \begin{cases} x = \frac{1}{2} \frac{f^2 f' + 2af - (a^2 + 2k)f''}{f - (a-p)f'}, \\ y = \pm \frac{1}{2} \frac{f^2 - 2(a-p)ff'' - a^2 + 2ap + 2k}{f - (a-p)f'}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen ergeben sich auch aus 13a., wenn man darin $z = 0$ setzt.

Wie man ohne weiteres einsieht, lösen dieselben Gleichungen die Aufgabe:

Ein Kreis bewegt sich so in seiner Ebene, dass sein Mittelpunkt auf einer Kurve dieser Ebene hingleitet, welche Symmetriegeraden besitzt. Jede Lage dieses Kreises bestimmt in Gemeinschaft mit einem festen Kreis der Ebene, dessen Mittelpunkt auf einer der Symmetriegeraden liegt, eine Potenzlinie. Es ist die Enveloppe aller dieser Potenzlinien zu finden

§. 10.

Spezial-Aufgabe 2.

Eine Kugel vom Radius r_1 bewegt sich so, dass ihr Mittelpunkt auf einer Parabel hingleitet.

auf einem Rotationsparaboloid hingleitet so zwar, dass er der Reihe nach mit jedem Punkt dieser Rotationsfläche zusammenfällt.

Jede Lage der beweglichen Kugel besitzt in bezug auf eine feste Kugel vom Radius r_1 , deren Mittelpunkt der Scheitel

der Parabel | des Paraboloids

ist, eine Potenzebene. Es ist die Einhüllungsfläche aller dieser Potenzebenen zu bestimmen.

Behalten wir das Koordinatensystem und die Bezeichnungen des §. 9. bei so zwar, dass wir den Scheitel

der Parabel | des Paraboloids

als Koordinatenanfangspunkt wählen, und bezeichnen wir das Halbparameter

der Parabel | des Paraboloids

mit m , so ergibt sich durch Einsetzen von $\sqrt{2ma}$ anstelle von f und von 0 anstelle von p und k

in die Gleichungen 13. | in die Gleichungen 13a.

und durch Elimination von a aus den erhaltenen Gleichungen als Gleichung der Einhüllungsfläche

und zugleich als Gleichung von deren Spur in der
 $xy = \text{Ebene}$

die Gleichung

$$y^2 = \frac{4}{27} \frac{(x-m)^3}{m} \quad | \quad y^2 + z^2 = \frac{4}{27} \frac{(x-m)^3}{m}.$$

Man sieht leicht ein, dass es keine Beeinträchtigung der Allgemeinheit ist, wenn man m in dieser Gleichung als positive Grösse auffasst. Aus der Gleichung folgt, dass die Einhüllungsfläche

eine semikubische Parabel zur Grundspur hat, deren | ein semikubisches Rotationsparaboloid ist, dessen Spitze vom Scheitel der gegebenen Parabel | Spitze vom Scheitel des gegebenen Paraboloids

um m entfernt ist.

Diese semikubische Parabel | Die Grundspur der Einhüllungsfläche

kann als Evolute einer gewöhnlichen Parabel aufgefasst werden, deren Scheitel $-m$ zur Abscisse hat, und deren Halbparameter gleich $+2m$ ist, deren Brennpunkt also mit dem Scheitel

der gegebenen Parabel | des gegebenen Paraboloids

zusammenfällt.

Der allgemeinere Fall, dass der Radius der beweglichen Kugel und der der festen von einander verschieden sind, und dass der Mittelpunkt der festen Kugel irgendwo im Raum liegt,

sowie dass das gegebene Paraboloid ein elliptisches
oder hyperbolisches ist,

bleibt wiederum unerledigt.

Spezial-Aufgabe 3.

Der Mittelpunkt einer Kugel vom Radius r_1 gleitet

auf einer gleichseitigen Hyperbel hin.

auf einem gleichseitigen Rotationshyperboloid hin
so zwar, dass er der Reihe nach mit jedem Punkt
dieser Rotationsfläche zusammenfällt.

Jede Lage beweglichen Kugel besitzt in bezug auf eine feste Kugel vom Radius r_1 , deren Mittelpunkt der Mittelpunkt

der Hyperbel | des Hyperboloids

ist, eine Potenzebene. Es ist die Einhüllungsfläche aller dieser Potenzebenen zu bestimmen.

Behalten wir das Koordinatensystem und die Bezeichnungen des §. 9. bei so zwar, dass wir

die reelle Axe der Hyperbel etwa als $x = \text{Axe}$ und | den Mittelpunkt des Hyperboloids
den Mittelpunkt der Hyperbel

als Koordinatenanfangspunkt wählen, und bezeichnen wir die Halbaxe

der Hyperbel | des Hyperboloids

mit m , so resultiert durch Einsetzen von 0 anstelle von p und k und

| für den Fall, dass das Hyperboloid zweischalig ist,

von $\sqrt{a^2 - m^2}$ anstelle von f

in die Gleichungen 13. | in die Gleichungen 13a.

und durch Elimination von a aus den erhaltenen Gleichungen als Gleichung der Einhüllungsfläche

und zugleich als Gleichung von deren Grundspur |

die Gleichung :

$$4y^6 - 12y^4x^2 - 15y^4m^2 + 12y^2x^4 - 78y^2x^2m^2 \\ + 12y^2m^4 - 4x^6 - 15x^4m^2 - 12x^2m^4 + 4m^6 = 0.$$

$$4(y^2 + z^2)^3 - 12(y^2 + z^2)^2x^2 - 15(y^2 + z^2)^2m^2 \\ + 12(y^2 + z^2)x^4 - 78(y^2 + z^2)x^2m^2 + 12(y^2 + z^2)m^4 \\ - 4x^6 - 15x^4m^2 - 12x^2m^4 + 4m^6 = 0,$$

woraus als Gleichung der Grundspur der Einhüllungsfläche folgt:

$$4y^6 - 12y^4x^2 - 15y^4m^2 + 12y^2x^4 - 78y^2x^2m^2 \\ + 12y^2m^4 - 4x^6 - 15x^4m^2 - 12x^2m^4 + 4m^6 = 0.$$

Ist das Hyperboloid einschalig, so ist in den Gleichungen 13a. anstelle von $f\sqrt{a^2 + m^2}$ zu setzen. Mithin erhält man die Gleichung der Einhüllungsfläche und die Gleichung von deren Grundspur für diesen Fall aus den entsprechenden Gleichungen für den Fall, dass das Hyperboloid zweischalig ist, indem man in diesen Gleichungen anstelle von m $m.i$ setzt. Als Gleichung der Grundspur der Einhüllungsfläche findet man dann eine Gleichung, welche durch Multiplikation mit -1 auf eine solche Form gebracht werden kann, dass sie sich von der letzten Gleichung nur dadurch unterscheidet, dass sie da y enthält, wo in jener x vorkommt, und umgekehrt. Mithin ist für gleiche Werte von m die Grundspur im Fall $f = \sqrt{a^2 + m^2}$ der Grundspur im Fall $f = \sqrt{a^2 - m^2}$ kongruent, nur liegt die eine Grundspur so zur $y = \text{Axe}$ wie die andere zur $x = \text{Axe}$. Es genügt daher, die Gestalt der Grundspur der Einhüllungsfläche für den einen Fall zu untersuchen, um sie auch für den anderen Fall zu kennen.

Aus der Gleichung der Einhüllungsfläche folgt, dass diese von der sechsten Ordnung ist. Da die Fläche durch ihre Grundspur vollkommen bestimmt ist, so diskutieren wir die Gleichung der letzteren.

der letzteren, und zwar wählen wir den Fall, dass
 $f = \sqrt{a^2 - m^2}.$

Durch diese Diskussion finden wir Folgendes:

Die Grundspur wird durch die Axen ihrer Koordinatenebene in kongruente Quadranten zerlegt. Sie besteht aus zwei in bezug auf die $y =$ Axe symmetrisch zu einander liegenden Zweigen, welche die $x =$ Axe bezüglich in den Entfernungen $+\frac{m}{2}$ und $-\frac{m}{2}$ vom Koordinatenanfang schneiden und sich auf der $y =$ Axe in den Entfernungen $+m\sqrt{2}$ und $-m\sqrt{2}$ vom Koordinatenanfangspunkt durchsetzen. Die $x =$ Axe schneiden die beiden Zweige rechtwinklig, die $y =$ Axe unter Winkeln von 30° bzw. 150° . Die beiden in bezug auf die $x =$ Axe symmetrisch zu einander liegenden Teile, in welche jeder Zweig durch die $x =$ Axe zerlegt wird, kehren dieser Axe überall die konkave Seite zu. Die Punkte des einen Zweigs entfernen sich mit wachsendem, die des anderen mit abnehmendem x immer weiter von der $x =$ Axe bis zu unendlich grossen Werten der Ordinate. Maxima, Minima, Wendepunkte, Rückkehrpunkte, Asymptoten u. s. w. sind nicht vorhanden. Ferner ergibt sich, dass die Grundspur der Einhüllungsfläche

die gegebene Hyperbel | die Grundspur des gegebenen Hyperboloids
 nicht schneidet, vielmehr schliesst derjenige ihrer Zweige, welcher dem einen Zweig
 der Hyperbel | der Grundspur des Hyperboloids
 entspricht, deren anderen Zweig ein.

Auch hier lassen wir den allgemeineren Fall, dass der Radius der beweglichen Kugel von dem der festen verschieden ist, dass der Mittelpunkt der letzteren irgendwo im Raume liegt, und dass

die Hyperbel ungleichseitig | das Hyperboloid ein elliptisches
 ist, unerledigt.

Wir fügen hier den Beweis des Satzes ein:

Bewegt sich eine Kugel von konstantem Radius so, dass ihr Mittelpunkt auf einer ebenen Kurve hingleitet, so ist die von ihrer Potenzebene in bezug auf eine feste Kugel, deren Mittelpunkt in der Ebene der Kurve liegt, eingehüllte Cylinderfläche im allgemeinen und höchstens von doppelt so hoher Klasse als die Ordnung der Kurve beträgt.

Zunächst folgt aus der senkrechten Lage der Potenzebenen zur Ebene der Kurve, dass die Einhüllungsfläche eine Cylinderfläche ist. Zum Beweis dafür, dass diese Cylinderfläche von doppelt so hoher Klasse ist als die Ordnung der Kurve beträgt, haben wir den Hülfsatz nötig:

Der Ort der Mittelpunkte aller Kreise einer Ebene vom Radius r_1 , deren Potenzlinien in bezug auf einen festen Kreis derselben Ebene vom Radius r_2 durch einen festen Punkt dieser Ebene gehen,

welcher vom Mittelpunkt des letzteren Kreises um die Strecke p entfernt ist, ist der Kreis, den man mit $\sqrt{r_1^2 - r_2^2 + p^2}$ als Radius um den festen Punkt beschreiben kann.

Um diesen Hilfssatz zu beweisen, wählen wir den festen Punkt als Koordinatenanfangspunkt, den durch den Mittelpunkt des Kreises vom Radius r_2 hindurchgehenden Strahl, welcher bei dem festen Punkt beginnt, als positive $x = \text{Axe}$ und bezeichnen die Koordinaten der Punkte des Orts mit ξ und η . Dann ist die Gleichung der Kreise vom Radius r_1 :

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = r_1^2,$$

während die Gleichung des Kreises vom Radius r_2 lautet:

$$(x - p)^2 + y^2 = r_2^2.$$

Mithin besitzen die Potenzlinien die Gleichung:

$$\xi^2 + \eta^2 + 2x(p - \xi) - 2y \cdot \eta = r_1^2 - r_2^2 + p^2.$$

Dieser Gleichung müssen die Koordinaten des festen Punkts $x = y = 0$ genügen. Folglich ist die Gleichung des Orts:

$$\xi^2 + \eta^2 = r_1^2 - r_2^2 + p^2,$$

w. z. b. w.

Um nun von irgend einem Punkt aus die Tangentialebenen an die Einhüllungsfläche zu konstruieren, hat man von dem Punkt auf die Ebene der Kurve das Lot zu fällen, dann nach obigem Hilfssatz in dieser Ebene um den Fusspunkt des Lots mit $\sqrt{r_1^2 - r_2^2 + p^2}$ als Radius den Kreis zu beschreiben, wenn r_1 den Radius der beweglichen, r_2 den der festen Kugel und p den Abstand des Mittelpunkts der letzteren vom Fusspunkt des Lots bedeutet; darauf hat man um die Schnittpunkte des Kreises mit der Kurve Kugeln vom Radius r_1 zu beschreiben und deren Potenzebenen inbezug auf die feste Kugel zu konstruieren. Diese sind die gesuchten Tangentialebenen, da sie der Potenzebenen-schar angehören, und da ihre Schnitte mit der Ebene der Kurve als Potenzlinien der Schnitte der Kugeln vom Radius r_1 mit dieser Ebene inbezug auf den Schnitt der Kugel vom Radius r_2 mit derselben Ebene durch den Fusspunkt des Lots, sie selbst also durch den gegebenen Punkt hindurchgehen. Ist nun die Kurve von der n ten Ordnung, so wird sie von dem Kreis vom Radius $\sqrt{r_1^2 - r_2^2 + p^2}$ in $2n$ Punkten (welche zum

Teil oder alle imaginär sein können) geschnitten. Mithin gibt es von einem Punkte aus im allgemeinen und höchstens $2n$ Tangentialebenen an die Einhüllungsfläche, d. h. diese ist eine Cylinderfläche im allgemeinen und höchstens*) von der 2ten Klasse, w. z. b. w.

So erhält man z. B., wenn man in die Gleichung, welche die Lösung von Spezial-Aufgabe 3. darstellt, anstelle der Punktkoordinaten Linienkoordinaten einführt, eine Gleichung vierten Grads.

Zum Schluss sei darauf hingewiesen, dass aus dem Hilfssatz natürlich auch für das entsprechende Problem der Ebene ein entsprechender Satz sowie die Konstruktion der Tangenten an die Einhüllungskurve der Potenzlinien folgt.

D.

§. 11.

Spezial-Aufgabe 4.

Der Mittelpunkt einer Kugel gleitet auf einer festen Geraden hin.

Der Radius der Kugel ändert sich so, dass seine Grösse der Entfernung des Kugelmittelpunkts von einem festen Punkt

der Geraden | der Ebene

direkt proportional ist. Jede Lage der beweglichen Kugel besitzt inbezug auf eine feste Kugel von konstantem Radius r , deren Mittelpunkt auf der

in dem festen Punkt auf der festen Geraden senkrechten Ebene

Spezial-Aufgabe 4a.

auf einer festen Ebene hin so zwar, dass er der Reihe nach mit jedem Punkt dieser Ebene zusammenfällt.

in dem festen Punkt auf der festen Ebene senkrechten Geraden

liegt, eine Potenzebene. Es ist die Einhüllungsfläche aller dieser Potenzebenen zu bestimmen.

Zum Zweck der Lösung dieser Aufgabe wählen wir

die feste Gerade als $x = \text{Axe}$ und die Verbindungslinie des festen Punkts mit dem Mittelpunkt der festen Kugel als $z = \text{Axe}$.

die feste Ebene als $xy = \text{Ebene}$ und das in dem festen Punkt auf ihr errichtete Lot als $z = \text{Axe}$.

Bezeichnen wir nun die $z =$ Koordinate des Mittelpunkts der festen Kugel mit c und die Länge des Radius' der beweglichen Kugel in der Entfernung 1 von dem festen Punkt mit ϱ , so ist:

$$F = F_1 = 0, F_2 = \varrho \cdot a, \Phi = \Phi_1 = 0, \Phi_2 = c, \Phi_3 = r \quad | \quad F = 0, F_1 = \varrho \sqrt{a^2 + b^2}, \Phi = \Phi_1 = 0, \Phi_2 = c, \Phi_3 = r$$

*) Wenn der Mittelpunkt der festen Kugel auf der Kurve liegt und der Radius dieser Kugel gleich dem der beweglichen Kugel ist, so ist aus nahe liegenden Gründen, falls die Ordnung der Kurve als die n te bezeichnet wird, die Einhüllungsfläche nur von der $(2n-1)$ ten Klasse. So ist z. B. die durch Lösung von Spezial-Aufgabe 2. erhaltene Fläche nur von der dritten Klasse. Aus ebenso nahe liegenden Gründen ist, wenn die Kurve ein Kreis ist, die Einhüllungsfläche nicht von der 2.2ten sondern nur von der $(2 \cdot 2 - 2)$ ten d. h. von der zweiten Klasse, was mit einem Resultat in §. 8. stimmt.

und also:

$$\begin{array}{l|l} u = \frac{(1 - \varrho^2) a^2 - (c^2 - r^2)}{2a}, & u = \frac{(1 - \varrho^2) (a^2 + b^2) - (c^2 - r^2)}{2a}, \\ v = \infty, & v = \frac{(1 - \varrho^2) (a^2 + b^2) - (c^2 - r^2)}{2b}, \\ w = \frac{(1 - \varrho^2) a^2 - (c^2 - r^2)}{-2c}, & w = \frac{(1 - \varrho^2) (a^2 + b^2) - (c^2 - r^2)}{-2c}. \end{array}$$

Durch Substitution dieser Werte von u , v und w in die Gleichungen 8. und Elimination
von a | von a und b

aus den erhaltenen Gleichungen findet man als Gleichung der Einhüllungsfläche:

$$x^2 = 2c(1 - \varrho^2) \left(z - \frac{c^2 - r^2}{2c} \right) \quad \left| \quad x^2 + y^2 = 2c(1 - \varrho^2) \left(z - \frac{c^2 - r^2}{2c} \right).$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass, falls ϱ nicht gleich 1 ist, die Einhüllungsfläche
eine Cylinderfläche ist, deren Seitenlinien der $y =$ | ein Rotationsparaboloid ist, dessen Axe die $z =$ Axe ist.
Axe parallel sind, und deren Aufrißspur eine Parabel
ist, von welcher die $z =$ Axe Axe ist.

Die $z =$ Koordinate des Scheitels

dieser Parabel | dieses Paraboloids

ist gleich $\frac{c^2 - r^2}{2c}$, während das Halbparameter den Wert $c(1 - \varrho^2)$ hat. Wenn $r = c$ ist, fällt der Scheitel
mit dem Koordinatenanfang zusammen.

Ist $\varrho = 1$, so kommt eine Einhüllungsfläche nicht zu stande, da dann alle Potenzebenen
durch dieselbe Gerade | durch denselben Punkt

gehen.

Spezial-Aufgabe 4b.

Der Mittelpunkt einer Kugel gleitet auf einer Ebene hin so zwar, dass er der Reihe nach mit allen Punkten dieser Ebene zusammenfällt. Gleichzeitig ändert sich der Radius der Kugel so, dass seine Grösse der Entfernung des Kugelmittelpunkts von einer festen Geraden der Ebene direkt proportional ist. Jede Lage der beweglichen Kugel besitzt eine Potenzebene inbezug auf eine feste Kugel vom Radius r , deren Mittelpunkt auf einer Geraden liegt, welche in einem Punkt der festen Geraden auf der Ebene senkrecht steht. Es ist die Einhüllungsfläche aller dieser Potenzebenen zu bestimmen.

Um diese Aufgabe zu lösen, wählen wir die Ebene als $xy =$ Ebene, die feste Gerade als $y =$ Axe und das vom Mittelpunkt der festen Kugel auf die Ebene gefällte Lot als $z =$ Axe. Bezeichnen wir dann die $z =$ Koordinate des Centrums der festen Kugel mit

c und die Länge des Radius der beweglichen Kugel in der Entfernung 1 von der festen Geraden mit ϱ , so ist:

$F=0$, $F_1=\varrho \cdot a$, $\Phi=\Phi_1=0$, $\Phi_2=c$, $\Phi_3=r$ und mithin:

$$u = \frac{(1-\varrho^2)a^2 + b^2 - (c^2 - r^2)}{2a},$$

$$v = \frac{(1-\varrho^2)a^2 + b^2 - (c^2 - r^2)}{2b},$$

$$w = \frac{(1-\varrho^2)a^2 + b^2 - (c^2 - r^2)}{-2c}.$$

Setzt man diese Werte von u , v und w in die Gleichungen 8. ein und eliminiert a und b aus den erhaltenen Gleichungen, so findet man als Gleichung der Einhüllungsfläche:

$$x^2 + y^2(1-\varrho^2) = 2c(1-\varrho^2)\left(z - \frac{c^2 - r^2}{2c}\right).$$

Die Einhüllungsfläche ist mithin, je nachdem $\varrho < 1$ oder $\varrho > 1$, ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid, dessen Scheitel $\frac{c^2 - r^2}{2c}$ zur $z =$ Koordinate hat, und dessen Axe die $z =$ Axe ist. Für $r=c$ fällt der Scheitel mit dem Koordinatenanfang zusammen.

Wenn $\varrho=1$ ist, kommt eine Einhüllungsfläche nicht zu stande, da dann sämtliche Potenzebenen, obwohl eine zweifache Unendlichkeit solcher vorhanden ist, die Parabel

$$y^2 = 2c\left(z - \frac{c^2 - r^2}{2c}\right)$$

berühren.

III.

§. 12.

Wir könnten die Zahl dieser Spezial-Aufgaben noch beliebig vermehren. Wir schliessen jedoch die vorliegende Arbeit hiermit, indem wir uns die Behandlung der oben unerledigt gelassenen Fälle, die Lösung weiterer interessanter Spezial-Aufgaben des in dieser Arbeit behandelten Problems sowie die Bearbeitung des allgemeineren Problems, dass an die Stelle der Ebenen gleicher Tangenten die Kugeln proportionierter Tangenten treten, für eine spätere Gelegenheit aufsparen. Des weiteren behalten wir uns die Bearbeitung folgender Probleme vor:

1.

Die Mittelpunkte dreier Kugeln bewegen sich auf drei Raumkurven, während sich gleichzeitig ihre Radien nach bestimmten Gesetzen ändern. In kontinuierlicher Aufeinanderfolge werde in bestimmter Weise jeder Kugel des einen der dadurch entstehenden drei Kugelsysteme je eine Kugel der beiden anderen Systeme zugeordnet. Je drei so einander zugeordnete Kugeln bestimmen eine Potenzlinie. Es ist der geometrische Ort aller dieser Potenzlinien zu finden.

2.

Die Mittelpunkte von vier Kugeln bewegen sich
auf vier Raumkurven,

auf vier Flächen so zwar, dass jeder derselben der Reihe nach mit jedem Punkt seiner Fläche zusammenfällt,

während sich gleichzeitig ihre Radien nach bestimmten Gesetzen ändern. In kontinuierlicher Aufeinanderfolge werde in bestimmter Weise jeder Kugel des einen der dadurch entstehenden vier Kugelsysteme je eine Kugel der drei anderen Systeme zugeordnet. Je vier so einander zugeordnete Kugeln bestimmen einen Potenzpunkt. Es ist der geometrische Ort aller dieser Potenzpunkte zu finden.

3.

Die Mittelpunkte zweier Kugeln bewegen sich
auf zwei Raumkurven,

auf zwei Flächen so zwar, dass jeder derselben der Reihe nach mit jedem Punkt seiner Fläche zusammenfällt,

während sich gleichzeitig die Radien der Kugeln nach bestimmten Gesetzen ändern. In kontinuierlicher Aufeinanderfolge werde in bestimmter Weise jeder Kugel des einen der dadurch entstehenden Kugelsysteme eine Kugel des anderen zugeordnet. Je zwei so einander zugeordnete Kugeln bestimmen eine Kugel, von deren sämtlichen Punkten aus jene beiden Kugeln unter gleichen Winkeln gesehen werden. Es ist die Einhüllungsfläche aller dieser Kugeln gleicher Schwinkel zu bestimmen.

4.

Die Mittelpunkte dreier Kugeln bewegen sich auf drei Raumkurven, während sich gleichzeitig ihre Radien nach bestimmten Gesetzen ändern. In kontinuierlicher Aufeinanderfolge werde in bestimmter Weise jeder Kugel des einen der dadurch entstehenden Kugelsysteme je eine Kugel der beiden anderen Systeme zugeordnet. Je drei so einander zugeordnete Kugeln bestimmen einen Kreis gleicher Schwinkel. Es ist der geometrische Ort aller dieser Kreise zu finden.

5.

Die Mittelpunkte von vier Kugeln bewegen sich
auf vier Raumkurven,

auf vier Flächen so zwar, dass jeder derselben der Reihe nach mit jedem Punkt seiner Fläche zusammenfällt,

während sich gleichzeitig ihre Radien nach bestimmten Gesetzen ändern. In kontinuierlicher Aufeinanderfolge werde in bestimmter Weise jeder Kugel des einen der dadurch entstehenden Kugelsysteme je eine Kugel der drei anderen Systeme zugeordnet. Je vier so einander zugeordnete Kugeln bestimmen zwei Punkte gleicher Schwinkel. Es ist der geometrische Ort aller dieser Punktpaare zu finden.

Lebenslauf.

Am 20. Juli 1862 wurde ich, Adolf Kadesch, Sohn des Buchhalters August Kadesch aus Steckenroth bei Wiesbaden, zu Mainz geboren. Die Vorbildung zum Universitätsstudium erwarb ich mir auf dem Real-Gymnasium zu Wiesbaden. Ostern 1880 von dieser Anstalt mit einem Zeugnis der Reife entlassen, studierte ich von da ab bis Herbst 1883 an den Universitäten zu München, Berlin und Marburg Mathematik und Naturwissenschaften. Am 2. Mai 1884 bestand ich zu Marburg das Examen pro fac. doc., am 23. Februar 1887 ebendasselbst das Examen rigorosum. Seit Herbst 1884 bin ich im höheren Schuldienst thätig.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren: v. Jolly, Seidel, v. Prantl, Bauer, v. Riehl, Heigel, Narr, Pringsheim, Planck (München); Eichler, Paulsen, Wangerin, Ebbinghaus (Berlin); Stegmann, Wigand, Melde, Greeff, Cohen, Hess, Feussner, v. Drach, Elsas (Marburg). Allen diesen Herren fühle ich mich zu grossem Danke verpflichtet, welchen ich denselben hiermit geziemend ausspreche.